

VÖRÖS JÓZSEF–KEHL DÁNIEL–RAPPAI GÁBOR

A Sharpe-hányados-függvény és becslése neves portfóliókon

E tanulmány a Sharpe-hányadost dinamikusan kezeli, vagyis nemcsak azt tekinti, hogy egy adott portfólióval kapcsolatban mennyi a – szórással mért – egységnyi kockázatra jutó prémiumhozam (azaz a portfólió várható hozamának és a kockázatmentes kamatlábnak a különbsége), hanem a kamatláb függvényeként állítja elő a Sharpe-hányadost. Ehhez ismerni kell az átlaghozam és a kockázat portfólióra jellemző kapcsolatának analitikus formáját. Megállapítottuk, hogy a Sharpe-hányados-függvény szigorúan csökkenő konvex a kamatláb azon szakaszain, amelyekhez tartozó átlaghozam-kockázat felületen nincsenek töréspontok (azaz differenciálható) a kockázatos papírokra vonatkozóan. Amikor viszont a kamatlábtartományhoz egy töréspont tartozik (vagyis a hatékony felület nem differenciálható), a Sharpe-hányados-függvény ezen tartományban lineáris (és csökkenő). Mivel a piaci portfóliók negatív befektetéseket nem tartalmazhatnak, a hatékony felület soha nem differenciálható. Empirikus adatok alapján vizsgáltuk az index viselkedését a DAX 40 és a BUX 5 kosarakra, majd a 2015 és 2024 közötti évek különböző időszakaira előállítottuk a hatékony felületek analitikáját és ennek nyomán a Sharpe-hányados-függvényeket. Fontos megállapításaink közé tartozik, hogy a DAX Sharpe-hányadosa a 2022. február és 2024. december közötti (háborús) adatokra lényegesen magasabb, mint a 2015–2024-es időszakra, ugyanakkor a BUX Sharpe-indexe csak fele a DAX-énak. Az utóbbi időszakban viszont a BUX 5 átlaghozama a jelenlegi kapitalizációs adatok alapján közel kétszerese a DAX 40-ének.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: G11, G12, C61, C63.

Kulcsszavak: Sharpe-hányados, hatékony portfólió, kockázat-hozam felület, portfólióoptimalizálás, DAX 40, BUX 5.

* A kutatás a TKP2021-NKTA-19 számú projekt keretében készült, amely az Innovációs és Technológiai Minisztérium Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP2021-NKTA pályázati program finanszírozásában valósult meg.

Vörös József az MTA rendes tagja, *professor emeritus*, Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar (e-mail: voros.jozsef@ktk.pte.hu).

Kehl Dániel egyetemi docens, Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar (e-mail: kehld@ktk.pte.hu).

Rappai Gábor egyetemi tanár, Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kar (e-mail: rappai.gabor@ktk.pte.hu).

A tanulmányra a Creative Commons CC-BY irányelvei érvényesek.

A kézirat első változata 2025. november 17-én érkezett szerkesztőségünkbe.

DOI: <https://doi.org/10.18414/KSZ.2026.2.148>

The Sharpe-ratio function and its shape for some renowned portfolios

JÓZSEF VÖRÖS, DÁNIEL KEHL AND GÁBOR RAPPAI

The Sharpe-ratio is a popular financial indicator. This paper defines the Sharpe-ratio function, which explicitly illustrates the dynamic evolution of the risk premium (the portfolio's return minus the risk-free income) in relation to risk (the portfolio's variance). The Sharpe-ratio function requires knowledge of the composition of the efficient mean-variance frontier. We demonstrate that the Sharpe-ratio function is a strictly convex and decreasing function when the mean-variance frontier is differentiable, and (decreasing) linear when it is not. However, market portfolios may not include negative investments in a security (short selling is impossible), and the efficient frontier of the portfolios may not be differentiable at every point (for example, at the terminal point). We empirically test this over the 2015–2024 period, exhibiting the shapes of the mean-variance efficient frontier and the Sharpe-ratio functions for portfolios such as the DAX 40 and the BUX 5. Among our key findings, we observe that the DAX 40's Sharpe-ratios for the wartime period (February 2022 – December 2024) are significantly higher than those for the 2015–2024 period. The BUX 5 comprises only half of the DAX 40's Sharpe-ratios. However, during this latest period the BUX 5 exhibited a return twice as high that of the DAX 40.

Journal of Economic Literature (JEL) codes: G11, G12, C61, C63.

Keywords: Sharpe ratio, efficient portfolio, risk–return surface, portfolio optimization, DAX 40, BUX 5.

Bevezetés

A Nobel-díjas közgazdászok kutatási területeit áttekintve mintegy tucatnyi olyan nevet találunk, akik eredményeket mutattak fel portfóliók tulajdonságait vizsgálva. Köztük öt-hat olyan tudós is szerepel, akik a hatékony (portfólió)felület meghatározó tulajdonságait fedezték fel. A hozam-kockázat síkban egy portfólió a hatékony felületen fekszik, ha ugyanolyan kockázati szinten nincs olyan portfólió, amely nagyobb hozamot adna, vagy ugyanakkora hozamszinten kisebb kockázattal járna, illetve nagyobb hozammal és kisebb kockázattal rendelkezne. Markowitz (1956, 1959), valamint Markowitz és Todd (2000) modelljeit leegyszerűsítve (elhagyva a többnyire szubjektív, pótlólagos lineáris feltételeket), az általános portfólióproblémát a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad (1a)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = E, \quad (1b)$$

$$V_{Short}^{Stoxx}(E) = \min_{x_1, \dots, x_n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{ji} x_j x_i = E. \quad (1c)$$

E felírásban x_i a befektetés (amelyet egységnyinek tekintünk) azon arányát határozza meg, amelyet az i értékpapír vásárlására szánunk, és a *Stoxx* nevű portfólióban

(például FTSE 100, Euro Stoxx 50) n értékpapírt tekintünk, továbbá a_i ezen egységnyi befektetés várható hozamát jelöli, v_{ji} pedig az i -edik és j -edik értékpapír hozamai közötti kovarianciát méri. Az (1a) feltétel azt fogalmazza meg, hogy egységnyi tőkét fektetünk be, amitől E hozamot várunk, és ezt paraméternek tekintjük, amit az (1b) feltétel fogalmaz meg. Az (1c) kifejezés a befektetéstől elvárt E hozamhoz tartozó minimális szórásnégyzetet adja meg, amelyet a viselt kockázattal azonosítunk. Érdeemes megjegyezni, hogy az (1) leírás egy konvex, parametrikus programozási feladatot fogalmaz meg, amelynek legfontosabb terméke egy konvex parabola, amelynek független változója az elvárt hozam (E) lesz, formája pedig a viselendő kockázatot adja meg, ami egy szimmetrikus alakzat. A parabola minimumpontját megadó hozamnál kisebb hozamokhoz tartozó kockázatok nem érdekelnek bennünket, mert e kockázati szintekhez (a minimumpont jobb oldalán) magasabb hozamok tartoznak. Következésképpen, a $V_{Short}^{Stoxx}(E)$ kifejezés a *Stoxx* nevű portfólió minden szóba jöhető hozamához meghatározza ugyan a legkisebb kockázatot, de értelemszerűen bennünket csak a minimumhozamnál magasabb hozamok érdekelnek, mert ezek alkotnak hatékony felületet. A *Short* megjegyzés pedig azt fejezi ki, hogy a befektetési változók negatív értéket is felvehetnek, azaz a shortolás megengedett. Merton (1972) felfedte ezen függvény analitikus formáját is, amikor a v_{ij} kovarianciákból felépített V kovarianciamátrix pozitív definit, és az a_i értékek között különbözők is vannak:

$$V_{Short}^{Stoxx}(E) = \frac{fE^2 - 2dE + e}{ef - d^2}, \quad (2a)$$

ahol $f = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ji}$, $d = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ji} a_i$, és $e = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ji} a_j a_i$, és c_{ji} a V kovarianciamátrix inverzét kifejező C mátrix j -edik sorának i -edik eleme. A (2a) kifejezés tehát csak akkor létezik, amikor az értékpapírok várható hozamai nem mind egyformák, továbbá az is bizonyítható, hogy az $ef - d^2$ kifejezés pozitív, és az f is, hiszen ez az inverz mátrix elemeinek összege, amely a pozitív definitésg miatt pozitív. A (2a) haszon-kockázat felület tehát egy konvex parabola, amelynek növekvő íve megadja a haszon-kockázati hatékony felületet. Analitikus formákat tudunk adni a javasolt befektetési struktúrára is (Vörös, 1986):

$$x_j(E) = \frac{(e - dE) \sum_{i=1}^n c_{ji} + (fE - d) \sum_{i=1}^n c_{ji} a_i}{ef - d^2}. \quad (2b)$$

A kockázat nélküli befektetés lehetőségének modellbe vonása vezet el bennünket a Sharpe-féle hányadoshoz: a Sharpe-hányados (Sharpe, 1963, 1964, 1970) a hozamot a kockázattal arányosítja, és azt fejezi ki, hogy egy adott portfólió esetében az egységnyi kockázatra mennyi kockázati prémium jut, ahol most a kockázatot a portfólióhoz tartozó szórás fejezi ki (a szórásnégyzet helyett). A kockázati prémium pedig a portfóliónak a kockázat nélküli hozam feletti hozama. Vonjuk be most az (1) modellbe a kockázat nélküli hozamot, amelynek egységre jutó nagyságát jelölje r . A megoldandó feladat tehát:

$$\sum_{i=1}^n x_i + y = 1, \quad (3a)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i + ry = E, \quad (3b)$$

$$V_{Short}^{Stoxx}(E) = \min_{y, x_1, \dots, x_n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{ji} x_j x_i, \quad (3c)$$

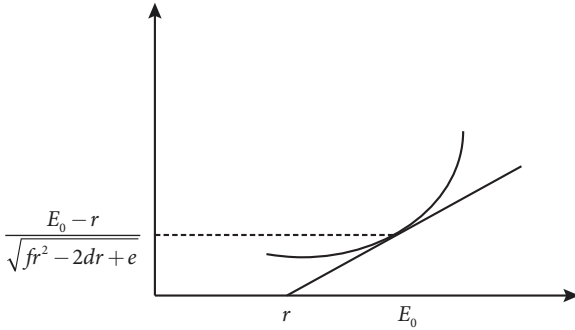
ahol y a kockázat nélküli papírba fektetett tőke arányát jelöli. Amikor $y=1$, akkor minden pénzünk a kockázat nélküli papírokban van, és hozamunk biztosan r lesz. Amikor $y=0$, minden pénzünk kockázatos papírokban van, és problémánk az (1) alattival azonos. Buser (1977) megadta a fenti modellben megfogalmazott hatékony felület analitikus formáját:

$$V_{Short}^{Stoxx}(E) = \frac{(E-r)^2}{fr^2 - 2dr + e}, \quad (4)$$

amely forma különösen érdekes, mert a számláló teljes négyzet. Amikor a kockázatot a szórással mérjük, akkor a haszon-kockázat függvény egy egyenes tehát, amely az $E=r$ pontban megy át a hozamtengelyen.

1. ábra

A (2a) és a (4) modell által meghatározott hatékony felületek négyzetgyökei



Megjegyzés: a függőleges tengely a szórás mint kockázati mérőszámot, a vízszintes pedig a várható hozamot mutatja.

Amikor tehát $y=0$, vagyis minden pénzünk kockázatos papírokban fekszik, a (4) formula a kockázatos befektetések szórását is méri, ami $\frac{E_0 - r}{\sqrt{fr^2 - 2dr + e}}$, a kockázati prémium pedig $E_0 - r$, amikor az elvárt hozam E_0 . Ezért az 1. ábrán az érintési pont-hoz tartozó Sharpe-hányados:

$$(E_0 - r) : \frac{E_0 - r}{\sqrt{fr^2 - 2dr + e}} = \sqrt{fr^2 - 2dr + e} \quad (5a)$$

(az r pontnál a lineáris egyenes és a vízszintes tengely által bezárt szög kotangense).

A kapott eredmény egyik érdekessége, hogy a Sharpe-hányados az elvárt hozamszinttől független, továbbá a kockázat nélküli kamatláb függvényében konvex. Vegyük

ésre továbbá, hogy a négyzetgyök alatti függvény formája r -ben azonos a (2a) kifejezés számlálójával, a Sharpe-hányados alakulása tehát azonos a kockázatos befektetések hatékony felületével, a kettő egy konstanssal [az $(ef - d^2)$ reciprokéval] szorozva egyenlővé tehető. Mindkét függvény minimumpontja az $E = d/f$, illetve $r = d/f$ pontban van. E pontig a parabola csökkenő, utána növekvő. A kockázatos papírokkal kapcsolatos (2a) függvénynek azonban csak a $d/f \leq E$ hozamokhoz tartozó (növekvő) parabola ívét kell tekintenünk, hiszen a minimumponttól balra eső hozamokhoz tartozó kockázati szintekhez magasabb hozamszintek tartoznak a szemközti oldalon. A hatékony felület tehát a (2a) parabola jobb oldala, amelynek a négyzetgyökéhez húzott érintő [amelyet a (4) négyzetgyöke ír le] meredeksége E -ben növekvő lesz.

Következésképpen: amennyiben a kockázatos értékpapírok várható hozamai különbözők lesznek, a Sharpe-hányados-függvény, amely nem más, mint a (4) kifejezés négyzetgyöke meredekségének reciproka, r -ben egy monoton csökkenő konvex függvény.

A fenti eredmények (a fenti dőlt betűs megállapítás nélkül, mert az nem volt ismert) empirikus megfigyelésekre alapozott kritikája újabb Nobel-díjakat eredményezett. Fama és French (2004) tanulmánya foglalja össze a problémákat, ismertetve a Fama-French-féle (1996) háromfaktoros modelljüket. Ezek lényegi vádpontja pedig az, hogy az empirikus megfigyelések nem igazolják vissza az elméleti összefüggéseket. Markowitz (2005) válasza a kritikákra, hogy az eltérés természetes, mert a CAPM-*(Capital Asset Pricing Model)* elmélet származtatásának feltételei nem azok, amelyeket az empirikus elemzés során figyelembe vesznek. Brennan és Lo (2010) tovább erősíti e gondolatsort azzal, hogy mindazon hatékony hozam-kockázat felületek, amelyeket olyan portfóliók feszítenek ki, amelyek negatív befektetést (shortolást) tartalmaznak, lehetetlen hatékony felületek. Ugyanis az 1. ábrán is látható érintési pontban, az úgynevezett piaci portfólióban negatív hányad nem lehet, hiszen negatív kapitalizáció nem létezhet. Márpedig az empirikus eredményeket mindig a (2a), illetve a (4) függvényekhez hasonlítják, ott viszont a befektetési hányadok nem előjelkötöttek. Az (1), illetve a (3) modelleket ki kell tehát egészíteni az $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ feltételekkel, e vizsgálat eredménye pedig lehetséges hatékony felületeket ad.

A nemnegativitási feltételek kirovása újabb Nobel-díjas közgazdászt hoz a képbe. Dybvig (1984) ugyanis olyan portfólióproblémákat definiált gyakorlatilag végtelen számban, amely portfóliók hatékony hozam-kockázat felületei töréspontokat tartalmaznak. Dybvig híres portfólióproblémájának inputjai az alábbiak:

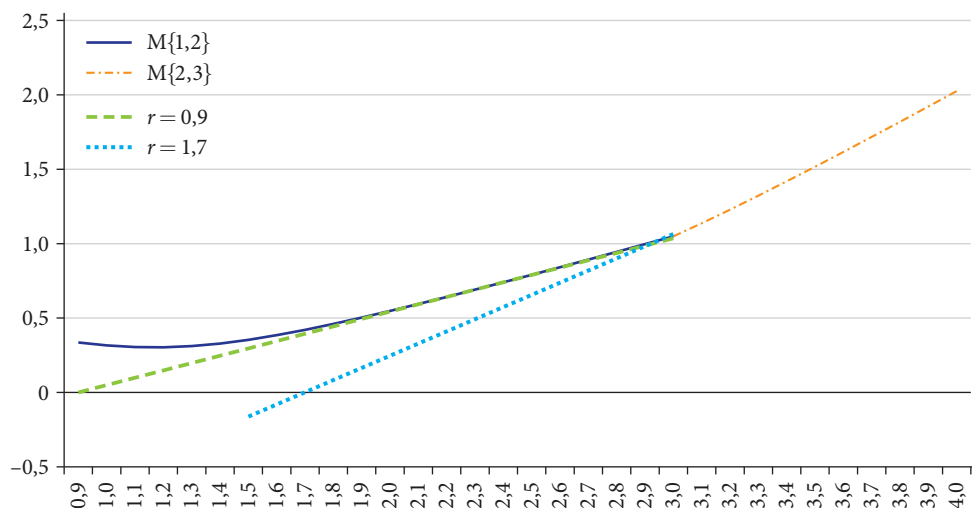
$$a' = [1, 3, 4], V = \begin{bmatrix} \partial & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \partial & 2 \\ 0 & 2 & 4 + \partial \end{bmatrix},$$

ahol ∂ egy paraméter. Tételizzük fel, hogy egy algoritmus vagy egy angyal megmondja az elérhető hozam (az $[1, 4]$ zárt intervallum) minden pontjára, hogy mely részvényekbe milyen pozitív arányban kell befektetnünk a minimális kockázat eléréseért. Jelölje M ezen pozitív változók halmazát egy adott pontban. Dybvig megmutatta, hogy ha $0 < \partial < 1/3$, akkor az $E = 4$ pontban minden pénzünket a harmadik részvénybe kell helyeznünk, amit $M\{3\}$ szimbólummal jelölünk. Azt is elárulta, hogy

amikor az elvárt hozam a $3 < E < 4$ intervallumban van, akkor a második és a harmadik részvénybe kell befektetnünk, tehát halmazunk összetétele: $M\{2,3\}$. $E=3$ -ra $M\{2\}$ halmazunk van, vagyis minden pénzünk a második részvényben van.

2. ábra

A Dybvig-probléma hatékony felülete $\partial=0,1$ -re



Megjegyzés: a függőleges tengely a szórást mint kockázati mérőszámot, a vízszintes pedig a várható hozamot méri.

A lehető legkisebb kockázatot az $E=1,16$ hozamnál érjük el, és egészen az $E=3$ hozamig az első és a második részvénybe kell fektetnünk, tehát a pozitív változók halmazát az $M\{1,2\}$ szimbólum jelzi. A hatékony felületnek az $E=3$ pontban töréspontja lesz (azaz nem differenciálható), következésképpen ezen törésponthoz sok kockázat nélküli fix kamatlábpontból húzható érintő. Ezeket foglalja össze a 2. ábra, ahol jól kivehető, hogy amikor a kockázat nélküli hozam az $1 \leq r \leq 1,78$ intervallumban van, az ezen intervallumból húzott érintők a várható hozam = 3, kockázat (szórás) = 1,1 ponton mennek keresztül. A 2. ábrán – mivel csak egy-egy pontot képeznek – nem jelöltük külön az $M\{3\}$ és az $M\{2\}$ halmazt. Az $M\{3\}$ tehát azt jelöli, hogy a portfólió egyetlen részvényből áll, a harmadikból. Ennek hozama a legnagyobb, $E=4$, azaz a hatékony felület jobb felső csúcsát foglalja el. Ha a kockázatot csökkenteni akarjuk, a második részvénybe is kell fektetnünk; ekkor portfóliónk két részvényt tartalmaz, a kettést és a hármast. Az utolsó, bal oldali szakaszt az egyes és kettés részvény teszi ki. Dybvig (1984) megmutatta, hogy ha a hatékony felületen töréspont van (nem differenciálható), akkor a portfóliót olyan részvények alkotják, amelyek várható hozama azonos. Ekkor viszont a (2a) függvény nem létezik e pontban, mert annak feltétele, hogy a portfólió olyan részvényeket tartalmazzon, amelyek hozamai különböznek. A Sharpe-hányados is érdekes formát mutat, mivel a töréspontokban ekkor $a_i = a_j = a$ minden, a portfólióban levő i -re és j -re. Könnyen ellenőrizhető, hogy ilyenkor $d = fa$, illetve $e = fa^2$. A Sharpe-hányados (jelöljük ezt SR -rel) pedig így alakul:

$$SR(r) = \sqrt{fr^2 - 2far + fa^2} = \sqrt{f} |r - a|. \quad (5b)$$

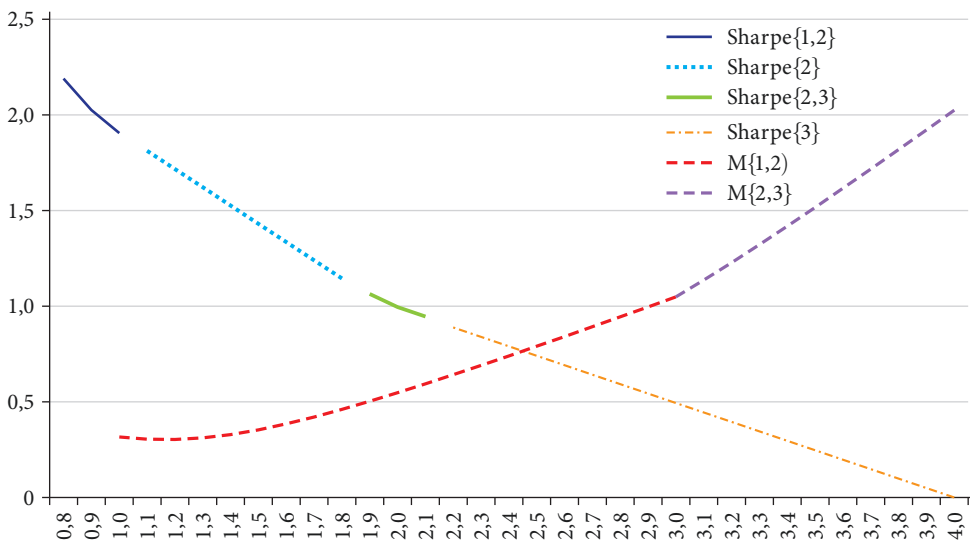
Következésképpen: a Sharpe-hányados azon pontban, ahol a hatékony felületen töréspont van, a kockázat nélküli kamatláb növekedésével lineáris arányban csökken, tekintettel arra, hogy csak az $r < a$ reláció jöhet szóba. (A 2. ábrán az r értékei az 1–1,78 sávban mozognak, vagyis mindkét érték kisebb 3-nál.)

A Dybvig-probléma $\partial = 0,1$ -re adódó megoldását foglalja össze az 1. táblázat, listázva az egyes intervallumokhoz tartozó e , f , d értékeket. Ezekből felírhatók az intervallumokhoz tartozó parabolaívek a (2a) képlet alapján, valamint a Sharpe-hányadosokat leíró függvények az (5a-b) képletek alapján.

E táblázat alapján készült a 3. ábra, amelyen a süllyedő vonal a Sharpe-hányadost reprezentálja. Mint jeleztük (és a 2. ábrán is látható), a hatékony felületnek töréspontja van az $E = 3$ pontban, és a vízszintes tengely $1 \leq r \leq 1,78$ intervallumból érintők húzhatók a kockázatos részvények hatékony felületéhez. Ezen intervallumban a Sharpe-hányadosok egy egyenesen foglalnak helyet, miként ez jól látható a 3. ábrán ezen a szakaszon.

3. ábra

A hatékony felület és a hozzá tartozó Sharpe-hányados



Megjegyzés: a függőleges tengely a szórás mint kockázati mérőszámot, a vízszintes pedig a várható hozamot méri.

Az érdekességeknek még mindig nincs vége, ugyanis Dybvig megmutatta, hogy ha $\partial = 1/3$, akkor $E = 3$ -ban ugyanúgy a második részvénybe kell minden pénzünket fektetnünk, viszont a hatékony felületnek nem lesz töréspontja. A 4. ábra mutatja a kisimított görbéket a shortolási lehetőséggel adódó hatékony (nem lehetséges) hozamkockázat felülettel egyetemben. (Azért, hogy széthúzzuk a függvényeket, a függőleges tengelyen most a szórásnégyzetet mutatjuk.) Az ábra rávilágít egyúttal arra, hogy

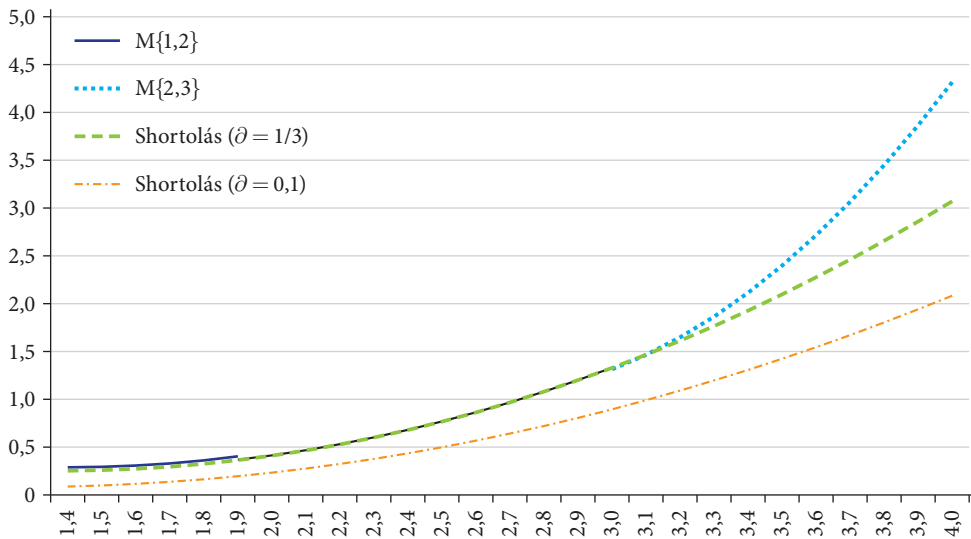
1. táblázat
A Dybvig-féle feladat megoldása $\partial=0,1$ -re és a Sharpe-hányados analitikus formája

A (3) feladathoz tartozó intervallumok r -re	Az (1) feladathoz tartozó intervallumok E -re	Az M halmazok szerkezete	e	f	d	Az (1) feladat hatékony felülete [a (2a) függvény]	A Sharpe-hányados-függvények (5a-b)
$2,05 \leq r < 4$	$E = 4$	$M\{3\}$	3,9	0,244	0,976	-	$\sqrt{0,244(4-r)}$
$1,78 \leq r < 2,05$	$3 \leq E < 4$	$M\{2,3\}$	12,75	2,35	5,29	$1,2E^2 - 5,4E + 6,5$	$\sqrt{2,35r^2 - 10,6r + 12,75}$
$1 \leq r < 1,78$	$E = 3$	$M\{2\}$	8,18	0,909	2,73	-	$\sqrt{0,909(3-r)}$
$-\infty < r < 1$	$1,16 \leq E < 3$	$M\{1,2\}$	18,8	10,909	12,73	$0,3E^2 - 0,7E + 0,5$	$\sqrt{10,91r^2 - 25,4r + 18,8}$

a shortolás/nem shortolás eredménye meglehetősen különböző; nem mindegy tehát, hogy az empirikus eredményeket mihez hasonlítjuk.

4. ábra

Hozam-szórásnégyzet hatékony felület (Dybvig-feladat shortolással, illetve a nélkül)



Megjegyzés: $M\{1,2\}$ és $M\{2,3\}$ között most nincs halmaz; egyetlen részvényt csak az $M\{3\}$ tartalmaz a jobb felső végpontban. A függőleges tengely most a szórásnégyzetet mint kockázati mérőszámot, a vízszintes pedig a várható hozamot méri.

Vörös és szerzőtársai (1999) megadták a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy a hozam-kockázat felület mikor differenciálható, és mikor nem. Vörös és Rappai (2026) egy hatékony eljárást dolgoztak ki a lehetséges hatékony felületek előállítására, vagyis arra az esetre, amikor a befektetési változók negatív értéket nem vehetnek fel. A kidolgozott algoritmus segítségével könnyen azonosíthatók a hatékony felületek nem differenciálható pontjai, ahol a Sharpe-hányados érdekes, speciális tulajdonságot mutat.

A következő részben ismertetjük a hatékony felület tulajdonságait elemző munkákat, azt követően közreadjuk a DAX 40 hatékony felületének leírását, majd bemutatjuk a BUX hasonló elemzését. Végül összefoglaljuk a következtetéseinket.

A hatékony felület alakjával foglalkozó fontosabb szakirodalmi források

Az átlaghozam-variancia vagy a hozam-kockázat elemzése a modern portfólióelmélet egyik legtöbbet alkalmazott területe, amely azon a feltételezésen alapul, hogy a befektetők teljes körű információ birtokában racionális befektetési döntéseket hoznak. Az elemzés során a befektetők azt mérlegelik, hogy mennyi kockázatot

hajlandók vállalni különböző szintű hozamokért cserébe. A probléma felfogható akár két célfüggvényes döntési problémának is (Steuer, 1986). Fama és MacBeth (1973) óta szinte közmegegyezés, hogy az átlagos piaci kockázatot a piaci portfóliót reprezentáló tőzsdeindexből számított hozam varianciájával (vagy annak gyökével, tehát szórásával) közelítjük. A portfólióelemzés alapfeladata, hogy meghatározza az adott befektetési lehetőségekből képezhető portfóliók hatékony hozam-kockázat felületét. Az előző fejezetben említett források és témák mellett elsőként említjük a Sharpe (1964), Lintner (1965) és Mossin (1966) által kidolgozott, már említett tőkepiaci árfolyamok elméletét (*capital asset pricing model*, CAPM), továbbá a Ross (1976) tanulmányában bemutatott arbitrázsértékelés-elméletet (*arbitrage pricing theory*, APT), amely tanulmányok középpontjában a Sharpe-hányados és a portfólió b együtthatójának értelmezése és becslése áll. Számos pénzügyi alkalmazásban, például az eszközárzásban, a portfólióválasztásban vagy a kockázatkezelésben a piaci b , valamint a Sharpe-hányados szerepe mindig is kiemelkedő volt. A kritikus pénzügyi mutatók használata egyrészt – elméleti oldalról – feltételezi a hatékony felületek tulajdonságainak alapos ismeretét, másrészt szükségessé teszi a kapott elméleti eredmények empirikus tesztelését.

A lehetséges portfóliókból képzett hatékony határfelület alakja komoly kihívások elé állítja a kutatókat. Zhang és Nie (2005) a kockázatos eszközökre vonatkozó hatékony és megvalósítható portfólió meghatározásának problémáját tárgyalta úgy, hogy figyelembe vette a befektetési eszközök részarányára vonatkozó nemnegativitási korlátozásokat. Zhang és Wang (2008) ezt az elemzést kiterjesztette olyan esetekre is, amikor hitelfelvétel is megengedett. Qi és szerzőtársai (2009) az átlaghozam-variancia hatékony határának pontozott ábrázolását adja, megjegyezve, hogy a hatékony határ a legtöbb esetben nem olyan sima, mint ahogyan azt az osztálytermekben ábrázolják. Valójában ha a negatív súlyok nem megengedettek, a lehetséges határ soha nem differenciálható, mert a maximális elérhető várható hozam diszkrét pontban végződik. De, mint a bevezetőben felfedtük, a probléma még ennél is több meglepetést tartogat: Dybvig (1984) azt találta, hogy a standard portfólió esetében, shortolást nem megengedve, ha a kockázatos papírok hatékony felületén van töréspont (2. ábra), akkor az ezt meghatározó portfólióba tartozó értékpapíroknak ugyanaz a várható hozama, de ennek az állításnak a fordítottja nem biztosan igaz. Töréspont esetén végtelen sok kockázat nélküli kamatpontból húzható érintő a piaci portfólióhoz, és a teljes CAPM-elmélet megbillen, alkalmazása nagyobb figyelmet igényel. Vörös és szerzőtársai (1999) megadták a differenciálhatóság szükséges és elégséges feltételét, vagyis tisztázták: ha a portfólióban levő papírok átlaghozama azonos, a hatékony felületnek mikor van, és mikor nincs töréspontja. Mint fentebb megmutattuk, a Sharpe-hányados viselkedését e tényező lényegesen befolyásolja. Kernstens és szerzőtársai (2012) empirikusan szemléltetik, hogy az irányvektor megválasztása miként befolyásolja a hatékony hozam-variancia portfóliók relatív rangsorát, színes térképeket is szolgáltatva a 78 eszközt tartalmazó pénzügyi univerzumukra. Guijarro (2018) egy újszerű hasonlósági mérőszámot vezet be, amely a lehetséges és a nem lehetséges portfóliókat hasonlítja össze. Később Guijarro és Tsinasladinis (2021) további megkötéseket vezettek be az eszközökbe befektetendő összegek maximális és minimális

nagyságára. A heurisztikus algoritmust és a kvadratikus programozást együttesen alkalmazva egy új eljárást dolgoztak ki. Steuer és társai (2024) egy új eljárást mutatnak be a hatékony felület előállítására, amikor a portfóliókra kardinalitási feltételeket vezettek be. A korrelációs mátrix apró perturbációjával lehetőség nyílik meglehetősen nagy méretű portfóliók esetén is a hatékony felület előállítására.

A kockázatosított érték (*value-at-risk*, *VaR*) fogalmának bevonása a portfólióelemzésbe új kutatási irányokat hozott létre. Ez ugyanis tovább növelte a figyelembe veendő korlátok számát, növelve a számítási nehézségeket, de ezek az új modellek számításba veszik a leértékelődési kockázatot is (Duffie & Pan, 1997). Mivel ezen modellek eltekintenek a *VaR* feletti veszteségektől, Rockafellar és Uryasev (2000) bevezette a feltételes kockázatosított érték fogalmát (*C-VaR*), amelyet később kiterjesztettek általános veszteségeloszlásokra is (Rockafellar & Uryasev, 2002). Cesarone és szerzőtársai (2023) a klasszikus várható hozam-kockázat modellhez olyan *VaR*-feltételt adnak, amely figyelembe veszi a szabályozói elvárásokat. Ezek eredménye általában még bonyolultabb, kevert egész értékű matematikai programozási feladat, amelyet általánosan ismert szoftvercsomagokkal (Gurobi, GAMS, genetikusan algoritmusok) oldanak meg.

Bár amikor a tantermekbe lépünk, ösztönösen egy folytonos, jól viselkedő görbével jellemezzük a haszon és a kockázat közötti összefüggést, valós portfóliók (FTSE 100, Euro Stoxx 50, DAX 40) hatékony várható hozam-kockázat összefüggését leíró függvényt senki sem látott. További célfüggvényt adva a portfólióproblémához, Qi és szerzőtársai (2017) egy olyan formulát fogalmaztak meg, amelynek segítségével meghatározták a hatékony felületet, de előjelkötetlenül. Bodnar és szerzőtársai (2017) meghatározták a hatékony felület globális minimumpontját, de szintén előjelkötetlenül. Még ez előtt, Bodnar és Gupta (2015) foglalkoztak a hozamokra jellemző aszimmetriával, és megmutatták, hogy ennek jelentős hatása lehet a globális minimális kockázatú portfólió szerkezetére. Amikor a minimális kockázattal járó portfólió analitikus formáját Qi és Steuer (2020) meghatározta, a célfüggvények száma akár a hármat is felülmúlta. De Qi és Steuer (2025) még tovább folytatták a hatékony felület explicit analitikus formáinak meghatározását: analitikus formákat határoztak meg olyan portfólióproblémákra, amelyek esetében az elérendő célokat több kvadratikus függvény írja elő.

A klasszikus portfólióprobléma hatékony felületet előállító analitikus formájának meghatározására Vörös és Rappai (2026) dolgoztak ki algoritmusokat, amelyek leírják a várható hozam alakulásának függvényében a minimális kockázatot biztosító lehetséges portfóliók szerkezetét és a felület explicit formáját. Ezek segítségével lehetővé válik a Sharpe-hányados-függvény meghatározása, amelynek formáját a bevezetőben tárgyaltak szerint a felület differenciálhatósága nagyban befolyásolja. Nemrégiben Qi és szerzőtársai (2024) is foglalkoztak a hatékony felület differenciálhatóságával, és a nemdifferenciálhatóság intenzitását százalékokban határozták meg. A következőkben a DAX 40 portfólió szerkezetét tárjuk fel különböző időintervallumokra, amelyekre külön-külön meghatározzuk a Sharpe-indexeket. Hasonló számításaink vannak a FTSE 100, valamint az Euro Stoxx 50 portfólióra is, de a hatalmas adatigény miatt csak a DAX 40-et mutatjuk be részletesen. Természetesen az érdeklődő olvasók számára szívesen megküldünk minden további információt.

A DAX 40

A Sharpe-hányadost leíró (5a-b) függvények meghatározhatóságának első feltétele a várható hozam és kockázat kapcsolatát meghatározó hatékony felület meghatározása, amely két előnnyel jár: egyrészt megismerjük, hogy a hatékony felület mely intervallumokban differenciálható (vagyis nem tartalmaz töréspontot), és ekkor az (5a) összefüggés használható, valamint az is ismertté válik, hogy mely r szakaszok tartoznak nem differenciálható pontokhoz, amelyekhez az (5b) formula használható. Mind a kizárólag kockázatos befektetéseket tartalmazó felület, mind a Sharpe-index formáit leíró függvények kulcsinputjai az e , f , d paraméterek, amelyek mindig változnak, amikor a portfólióban pozitív részaránnyal rendelkező részvények halmaza megváltozik. Az első halmaz mindig könnyen meghatározható: ez a legnagyobb várható hozammal bíró részvényből áll (tegyük fel, ennek kiválasztása egyértelmű), amikor is a teljes befektetendő összegért ezt a részvényt vásároljuk. Ha kockázatunkat csökkenteni szeretnénk, akkor más részvénybe is kell fektetnünk, és így tovább. Hogy mi ezen halmazok sorozata, amely megmutatja az optimális portfólió összetételét, annak meghatározására a Vörös és szerzőtársai (1999), Vörös és Rappai (2026) tanulmányokban leírt algoritmust, illetve szoftvereket hívjuk segítségül. Most – az irodalomban elsőként – a DAX 40 portfólióhoz tartozó hatékony felületet és a Sharpe-hányados-függvényt adjuk közre.

Miként közismert, a DAX 40 a legnevesebb 40 német vállalatnak a frankfurti tőzsdén forgalmazott részvényeiből álló portfólió. 2015. január 1-től napjainkig gyűjtöttük ezen részvények havi árfolyamadatait, amelyeket a Deutsche Börse biztosít. Az árfolyamadatokról származtattuk a havi hozamadatokat, majd ezekből a kovarianciamátrixot. Megfigyeltük továbbá ezen 40 vállalat piaci kapitalizációs értékeit is, amiből a portfólió összetételére következtettünk. Az átlaghozamokat, az elnevezéseket, továbbá a kapitalizációs adatokat a *függelék F1. táblázata* foglalja össze. (Nagy mérete miatt a kovarianciamátrixot nem közöljük, de igény esetén a kedves olvasó rendelkezésére bocsátjuk.) A 2015 és 2024 közötti hónapokra vonatkozó analízisünket a 2. táblázat foglalja össze, amely a hatékony felületet kifesztítő portfóliók összetételét írja le. A táblázat szerint, aki a legnagyobb (optimális) kockázatot vállalja, annak a Sartoriusba (jelölése SRT3) kell fektetnie minden pénzét, és ha a jövő úgy viselkedik, mint a múlt, akkor havi átlaghozama 2,8 (évi csaknem közel 34!) százalék lesz. Ha kockázatát csökkenteni szeretné, akkor Rheinmetall-részvényeket is vásárolnia kell (jelölése RHM) – végül is a fegyver- és a gyógyszeripar nem rossz kombináció. Ekkor a hatékony felületet, azaz az E várható hozam függvényében a minimális kockázatot (amelyet most a hozam szórásnégyzete mér) az $1286,2E^2 - 67,57E + 0,892$ parabolaív határozza meg. De csak a $0,0265 \leq E < 0,0284$ intervallumban, mert az $E < 0,0265$ pontokban újabb részvénybe, a HNR-be (Hannover Rück – egy pénzügyi szolgáltató) kell pénzt helyezni, hogy kockázatunk tovább csökkenjen. Ezek kisebb kockázatot jelentenek, mint ha minden pénzünk csak a Sartoriusban lenne, amikor is a kockázati szint 0,0106 (az SRT3 hozamának szórásnégyzete, amelyet a kovarianciamátrix ad meg). Az $E = 0,0284$ pontban a hatékony felület nem differenciálható, és a $0,02462 < r < 0,0284$ kockázat nélküli hozamokra a Sharpe-hányados-függvény

(csökkenő) lineáris lesz. Formája [lásd (5b) összefüggés], a 2. táblázat utolsó sorából származó f értékkel:

$$SR(r) = \sqrt{f} |r - a| = \sqrt{94,3} (0,0284 - r).$$

A következő Sharpe-index-intervallum a 2. táblázat utolsó előtti sorából: $0,009607 < r < 0,02462$, amelyre az (5a) képlet felhasználásával adódó Sharpe-hányados-függvény az alábbi:

$$SR(r) = \sqrt{fr^2 - 2dr + e} = \sqrt{218,24r^2 - 11,4r + 0,1514},$$

és a többi intervallumra is hasonló módon, a 2. táblázatból az e, f, d értékek felhasználásával határozhatjuk meg a Sharpe-hányados-függvény adott szakaszának analitikus formáját.

A függelék F1. táblázatában közölt kapitalizációs értékek alapján jellemezhetjük a DAX 40 teljesítményét a 2015 és 2024 közötti időszakra, megállapítva annak várható hozamát és kockázati szintjét. A DAX 40 hozamát az abban jelenleg szereplő részvényekkel határoztuk meg, méghozzá úgy, hogy az F1. táblázatban látható hozamokat súlyoztuk a kapitalizációs százalékokkal. Pontosabban, az i -edik részvény aránya egy adott időpontban: $x_i = \frac{q_i p_i}{\sum_{j=1}^{40} q_j p_j}$, ahol q_j a j -edik részvény darabszáma, p_j pedig az

ára a megfigyelt időpontban. (Ezen x_i -értékeket lásd az F1. táblázatban). A DAX 40 várható hozama adott időpontban: $\sum_{i=1}^{40} a_i x_i$, szórásnégyzete pedig $\sum_{i=1}^{40} \sum_{j=1}^{40} v_{ij} x_i x_j$. Így a 2015. január 1. és 2024. december 31. közötti adatok alapján számolva az átlaghozamot, valamint a 2025. január 1-i kapitalizációs adatokat tekintve, a DAX 40 várható havi hozama 0,006624. A kockázati szint, azaz a szórásnégyzet megismeréséhez a kovarianciamátrixot tehát mind jobbról, mind balról megszoroztuk a kapitalizációs százalékokkal. A kapott kockázati érték: 0,002386. Az 5. ábrán megjelöltük a DAX 40-nek a teljesítményét, amely pontból kiindulva és párhuzamost húzva a vízszintes tengellyel, megnéztük, milyen hozamszintnél metsz bele a hatékony felületbe. Közgazdasági nyelven megfogalmazva azt nézzük meg, hogy a DAX 40 jelenlegi kapitalizációja alapján, ugyanakkora kockázatot vállalva, mennyi hozamot érhetnénk el optimális befektetéssel. Az eredmény meglepő, hiszen azt látjuk, hogy a vízszintes vonalunk az $E = 0,024$ hozamszinten metszi a hatékony felületet, vagyis a metszéspontnak megfelelő befektetés azonos volatilitás mellett több mint háromszoros hozamot ígér. A 2. táblázatot elemezve azt látjuk, hogy az $E = 0,024$ hozamszint az M_4 hozamintervallumába esik, és e portfólióban négy részvény aránya pozitív. A (2b) képlet felhasználásával adódik az optimális befektetési struktúra százaléokban: $X_{SRT3} = 37,89$, $X_{RHM} = 30,03$, $X_{HNR} = 18,63$, $X_{MRK} = 13,45$.

Kifejlesztett szoftverünk lehetővé teszi, hogy az adatbankban tetszőleges intervallumokat jelöljünk ki. Talán meglepetést okoz néhány kijelölt intervallum teljesítménye, ezért ezen intervallumok Sharpe-hányados-függvényeit hasonlítjuk össze. A 3. táblázat a 2022. február 1. és 2024. december 31. közötti adatokkal mutatja be a hatékony portfóliók szerkezetének alakulását, amiből kitűnik, hogy ezen kétéves időszak különösen magas hozamot biztosított a Rheinmetall-részvények tulajdonosainak. A táblázat még

2. táblázat

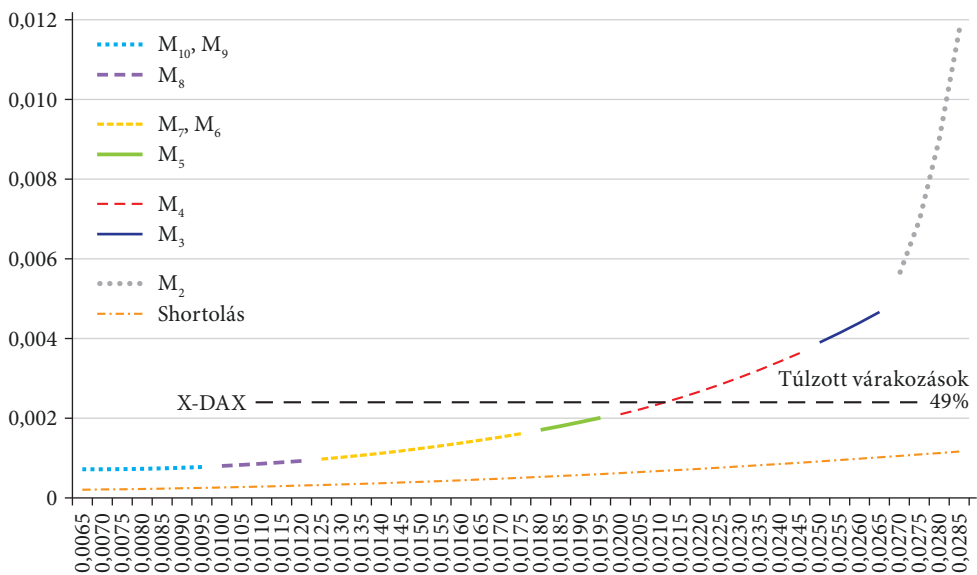
A hatékony portfóliók szerkezete és a hatékony felületet leíró függvény

Kockázat nélküli havi kamat- intervallumok (r)	A megfelelő havi (és évi) hozam- intervallumok	A hatékony felületet meghatározó részvények	e	f	d	A hatékony felületet meghatározó $V_R^{DAX}(E)$ függvény
$-\infty < r \leq$ $\leq -0,2878$	$[0,0065, 0,00687]$ $([7,8,24])$	$M_{10} = \{\text{Sartorius, Rheinmetall, HannRück, Merck, Beiersdorf, Qiagen, Daimler Truck, SiemensHealth, Symrise, DTele}\}$	0,212677	1394,82	9,059072	$6,5E^2 - 0,0844E +$ $+ 0,000991$
$-0,2878 \leq r \leq$ $\leq -0,02846$	$[0,00687, 0,0094]$ $([8,24,11,28])$	$M_9 = \{\text{Sartorius, Rheinmetall, HannRück, Merck, Beiersdorf, Qiagen, Daimler Truck, SiemensHealth, Symrise}\}$	0,201845	1394,69	9,096708	$7,0169E^2 - 0,0915E +$ $+ 0,001016$
$-0,02846 \leq r \leq$ $\leq -0,01243$	$[0,0094, 0,01173]$ $([11,28,14,07])$	$M_8 = \{\text{Sartorius, Rheinmetall, HannRück, Merck, Beiersdorf, Qiagen, Daimler Truck, SiemensHealth}\}$	0,195625	1387,01	9,315276	$7,515E^2 - 0,101E +$ $+ 0,00106$
$-0,01243 \leq r \leq$ $\leq -0,00192$	$[0,01173, 0,0169]$ $([14,07,20,7])$	$M_7 = \{\text{Sartorius, Rheinmetall, HannRück, Merck, Beiersdorf, Qiagen, Daimler Truck}\}$	0,19211	1364,257	9,598045	$8,0267E^2 - 0,113E +$ $+ 0,001131$
$-0,00192 \leq r \leq$ $\leq -0,00172$	$[0,0169, 0,01733]$ $([20,7,20,8])$	$M_6 = \{\text{Sartorius, Rheinmetall, HannRück, Merck, Beiersdorf, Qiagen}\}$	0,190696	980,175	10,33505	$12,236E^2 - 0,258E +$ $+ 0,00238$
$-0,00172 \leq r \leq$ $\leq 0,001482$	$[0,01733, 0,0194]$ $([20,8,23,3])$	$M_5 = \{\text{Sartorius, Rheinmetall, HannRück, Merck, Beiersdorf}\}$	0,190563	935,3072	10,41232	$13,396E^2 - 0,298E +$ $+ 0,00273$
$0,001482 \leq r \leq$ $\leq 0,007871$	$[0,0194, 0,0245]$ $([23,3,29,4])$	$M_4 = \{\text{Sartorius, Rheinmetall, HannRück, Merck}\}$	0,190071	711,1681	10,08004	$21,22E^2 - 0,603E +$ $+ 0,00567$
$0,007871 \leq r \leq$ $\leq 0,009607$	$[0,0245, 0,0265]$ $([29,4,31,77])$	$M_3 = \{\text{Sartorius, Rheinmetall, HannRück}\}$	0,176221	487,6099	8,32044	$29,203E^2 - 0,996E +$ $+ 0,01055$
$0,009607 \leq r \leq$ $\leq 0,02462$	$[0,0265, 0,0284]$ $([31,77,34])$	$M_2 = \{\text{Sartorius, Rheinmetall}\}$	0,151361	218,2433	5,732706	$1286,2E^2 - 67,57E +$ $+ 0,892$
$0,02462 \leq r < 0,0284$	$[0,0284] \quad ([34])$	$M_1 = \{\text{Sartorius}\}$	0,0761	94,3	2,68	0,0106

Megjegyzés: 2015. január 1. és 2024. január 1. közötti adatok alapján, nem pozitív hozamú részvények nélkül.

5. ábra

A DAX 40 hatékony felülete, shortolással, 2015–2024



Megjegyzés: a vízszintes tengelyen a havi hozamok, a függőleges tengelyen pedig a szórásnégyzet szerepel.

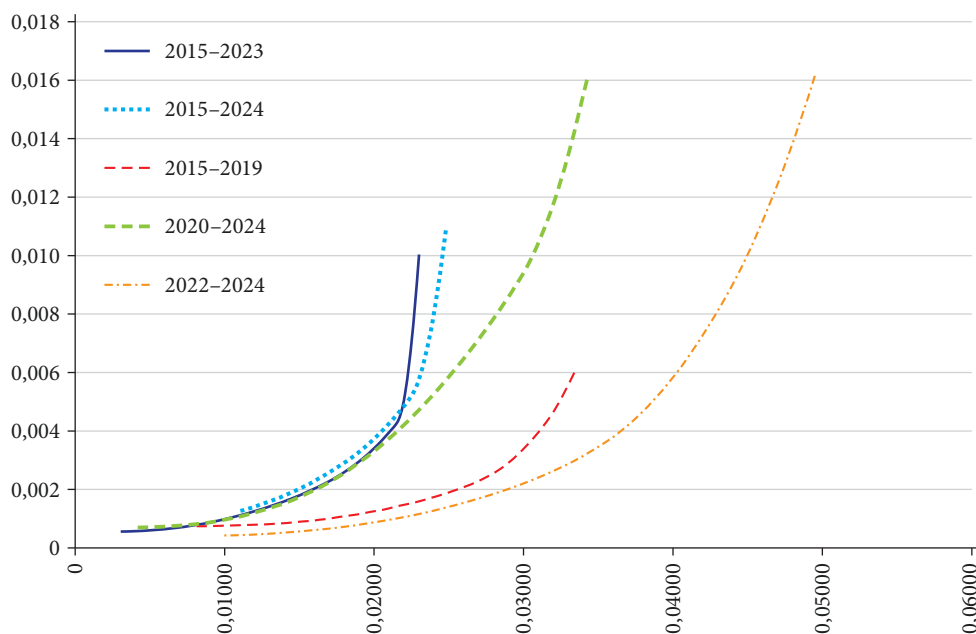
többet árul el magáról, amikor további időszakokat veszünk elemzés alá, és ezen időszakok hatékony felületeit egy ábrában mutatjuk be. A 6. ábra öt időintervallumhoz tartozó különböző hatékony felületeket rajzol fel, és figyelemre méltó, hogy a háborús időszakot (2022. február – 2024. december) jellemző hatékony felület minden pontja felülmúlja a békés időszakbelieket (vagyis a 2015 és 2019 közötti évek adatait). A háborús időszakban abszolút mértékben is nagyobb hozamokat lehetett elérni. Mint említettük, ezen időszakban a Rheinmetall havi hozama súrolja a 0,05-öt, vagyis az évi átlagos 60 százalékot, míg a 2015–2024-es adatokkal ez „mindössze” 30 százalék volt. Másrészt a háborús időszak hatékony felülete nem metszi sehol még a békés időszak hatékony felületét sem, ami az előbbi felett helyezkedik el. Másként fogalmazva: bármilyen elvárt hozamszint mellett a háborús időszak kevésbé kockázatos a tőzsdén.

A 2. és a 3. táblázatban szereplő e , f , d értékek felhasználásával fel tudjuk írni a Sharpe-hányados-függvényt. A 2015–2024 közötti időintervallumhoz tartozó Sharpe-hányados-függvény két első elemét az előzőkben már meghatároztuk. Hasonlóan járunk el a többi rész előállításánál is. A 7. ábra hasonlítja össze a $[0,01, 0,05]$ kockázatos hozamintervallumokra a 2015–2024, illetve a 2022. február 1. – 2024. december 31. közötti időszakokra vonatkozó Sharpe-hányados-függvényeket.

A 7. ábra vonalai mutatják a DAX 40 részvényekből alkotott piaci portfóliókhoz tartozó Sharpe-hányadosokat, amelyek a kockázat nélküli hozam változásával függvényt alkotnak, így az index dinamikus alakulását követhetjük nyomon. Az ábra vízszintes tengelye a kockázat nélküli hozamokat (kamatlábakat) méri, a függőleges tengely pedig az e kamatlábakhoz tartozó piaci portfólió Sharpe-hányadosát mutatja.

6. ábra

A DAX 40 hatékony felületei különböző időintervallumokban



Megjegyzés: az évek a január 1-i értéket jelzik, a vízszintes tengely a várható hozamot, a függőleges a szórásnégyzetet méri.

A 2022–2024-es háborús időszakra vonatkozó Sharpe-hányadosok minden kamatszinten felülmúlják a 2015 és 2024 közötti időszak adatait. A DAX esetében releváns 10 éves futamidejű állampapírok átlaghozama a 2022. február és 2024. december közötti időszakban 2,05 százalék volt, azaz a havi hozam 0,00171-nek felel meg, és az ehhez tartozó Sharpe-hányados a 7. ábra szerint 0,62. Tekintsük most a 2015 januárja 2024 decembere közötti időszakot: ekkor az állampapírok 10 éves átlaghozama évi 0,64 százalék volt, vagyis a 7. ábra alapján az $r = 0,0064/12 = 0,00053$ havi hozamhoz 0,425 Sharpe-hányados tartozik. A Sharpe-hányados tehát a háborús időszakban mintegy 50 százalékkal nagyobb.

Az 5. ábra magyarázatát kiegészítjük még azzal, hogy az ábra rávilágít a gazdasági modellezők és az ökonometerek közötti gyakori vitára. Bízvást állíthatjuk például, hogy ábránk az első az irodalomban, amely a DAX 40 részvények lehetséges hatékony felületét ábrázolja. A legelső vonalunk a shortolással adódó hatékony piaci portfóliók felülete, amely tele van negatív befektetésekkel. Ezek Brennan és Lo (2010) szerint így nem lehetséges piaci portfóliókat tartalmaznak. Mint ábránk is mutatja, ugyanolyan kockázati szinten a shortolás mesés, 49 százalékos tőzsdei hozamokat ígér, csak hogy ezek nem lehetségesek a valóságban. Nem kell ezért csodálkozni, hogy az empirikus megfigyelések sem igazolják vissza ezeket a hozamokat. E szempontból érdekes lesz a következő vizsgálatunk, amely azt mutatja, hogy shortolással sem lehet magasabb hozamokat elérni adott körülmények között.

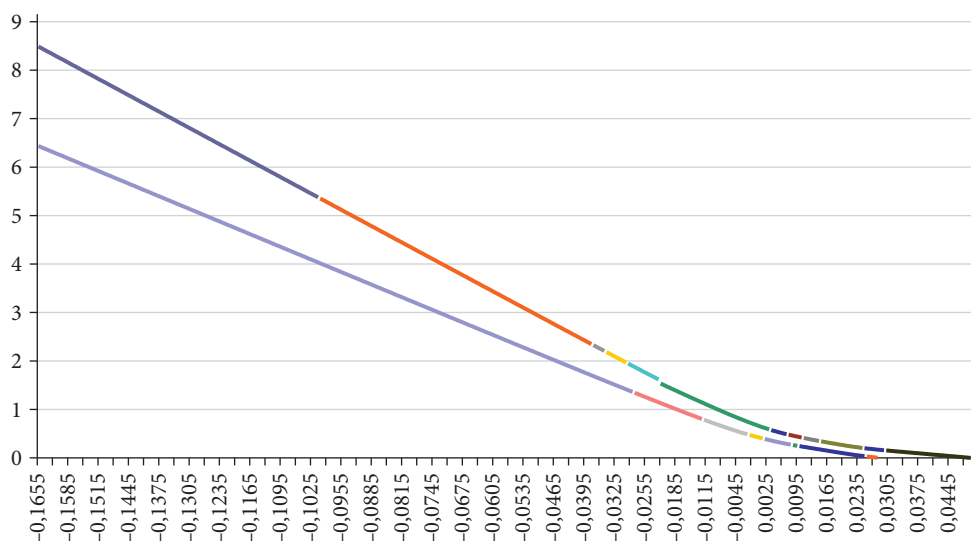
3. táblázat
A DAX 40 optimális szerkezete a 2022. február 1. – 2024. december 31. közötti időszak adatai alapján

Kockázat nélküli havi kamatintervallumok (r)		A megfelelő havi hozamintervallumok (E)		A hatékony felületet meghatározó részvények	e	f	d	A hatékony felületet meghatározó analitikus forma – $V_R^{DAX}(E)$ függvény		
		-ig	-tól							
-tól	-ig	-ig	-tól					a	b	c
0,02979	0,04950	0,04950	0,04950	$M_1 = \{RHM\}$	0,1516	61,8939	3,0636	0,0000	0,0000	0,0162
0,02462	0,02979	0,02979	0,04362	M_2 ; CBK	0,2639	188,3705	6,8318	61,9829	-4,4960	0,0868
0,01445	0,02462	0,02462	0,03575	M_3 ; SAP	0,3617	349,7253	10,8037	35,8018	-2,2120	0,0370
0,01030	0,01445	0,01445	0,03288	M_4 ; MUV2	0,3988	527,6004	13,3748	16,7250	-0,8480	0,0126
0,00690	0,01030	0,01030	0,03016	M_5 ; DTE	0,4191	719,0147	15,3459	10,9153	-0,4659	0,0064
0,00354	0,00690	0,00690	0,02473	M_6 ; BEI	0,4575	1524,9625	20,9036	5,8504	-0,1604	0,0018
0,00283	0,00354	0,00354	0,02394	M_7 ; DB1	0,4586	1615,8262	21,2255	5,5621	-0,1461	0,0016
-0,00225	0,00283	0,00283	0,01941	M_8 ; HNR1	0,4609	1898,5376	22,0270	4,8704	-0,1130	0,0012
-0,03027	-0,00225	-0,00225	0,01171	M_9 ; QIA	0,4634	2402,6403	20,8938	3,5495	-0,0617	0,0007
-0,03539	-0,03027	-0,03027	0,01137	M_{10} ; MUV2 $\rightarrow$	0,4573	2395,8982	21,0978	3,6837	-0,0649	0,0007
-0,03808	-0,03539	-0,03539	0,01124	M_{11} ; SAP $\rightarrow$	0,4321	2375,8298	21,8080	4,3114	-0,0792	0,0008
-0,10103	-0,03808	-0,03808	0,01055	M_{12} ; RHM $\rightarrow$	0,3714	2333,9745	23,4018	7,3106	-0,1466	0,0012
-0,16796	-0,10103	-0,10103	0,01030	M_{13} ; XICOV	0,4025	2337,0162	23,0945	5,7387	-0,1134	0,0010
$-\infty$	-0,16796	-0,16796	0,00990	M_{14} ; DB1 $\rightarrow$	0,3760	2336,0762	23,2524	6,9197	-0,1378	0,0011

Megjegyzés: az M_2 ; CBK leírás azt jelöli, hogy az M_1 halmazba belépett a CBK részvény, és létrejött az M_2 halmaz, így abban már két részvény aránya pozitív. Az M_{10} ; MUV2 $\rightarrow$ arra utal, hogy az M_9 halmazból kilépett az MUV2 részvény (eggyel csökkent a pozitív arányú részvények száma).

7. ábra

A DAX Sharpe-hányados-függvényei



Megjegyzés: a felső vonal a 2022. február 1. és 2024. december 31., az alsó pedig a 2015. január 1. és 2024. december 31. közötti időszakot jellemzi. A vízszintes tengelyen a havi kockázatmentes hozamok, a függőleges tengelyen pedig a Sharpe-hányadosok szerepelnek.

A BUX 5

A BUX 5 kosárba¹ a MOL, a Magyar Telekom, az Opus, az OTP és a Richter részvényeit helyeztük – ezek együtt a Budapesti Értéktőzsde piaci kapitalizációjának megközelítőleg 95 százalékát teszik ki. Mivel a kovarianciamátrixunk így csak 5×5 -ös, közlésük nem sok teret igényel. A *függelék F2. a) és b) táblázatában* találjuk a kapitalizációs részarányokat, a várható hozamokat és a kovarianciamátrixot.

Mivel az elmúlt tíz évben az Opus rendelkezett a legnagyobb átlagos hozammal, az M_1 halmazba ez a részvény kerül, természetesen az összes hatékony piaci portfólió közül a legnagyobb kockázattal. Ha kevesebb kockázatot akarunk vállalni, akkor – a Vörös és Rappai (2026) tanulmányában közölt algoritmust alkalmazva – OTP-részvényeket is vásárolni kell. A hatékony befektetések felületét és azok szerkezetét leíró 4. táblázat alapján a Telekom, majd a Richter és végül a MOL következik, de az elérhető minimális kockázat eléréséhez az OTP már nem kell, és természetesen a portfólió hozama is kisebb lesz. A táblázat utolsó sora szerint a minimális (a rendszerben meglevő, nem kiküszöbölhető) kockázat az $E = 0,0094 (= d/f)$ hozamszinten jelenik meg, a hozzá tartozó minimális kockázati szint pedig 0,00191 (a szórásnégyzet). E táblázat alapján

¹ A fentiekhez hasonló vizsgálatot végeztünk az Euro Stoxx 50 és az FTSE 100 kosarakkal kapcsolatban is. A nagy adat- és elemzési volumen miatt ezek közzétételére itt nincsen hely, viszont az érdeklődő olvasók számára szívesen elküldjük az eredményeket.

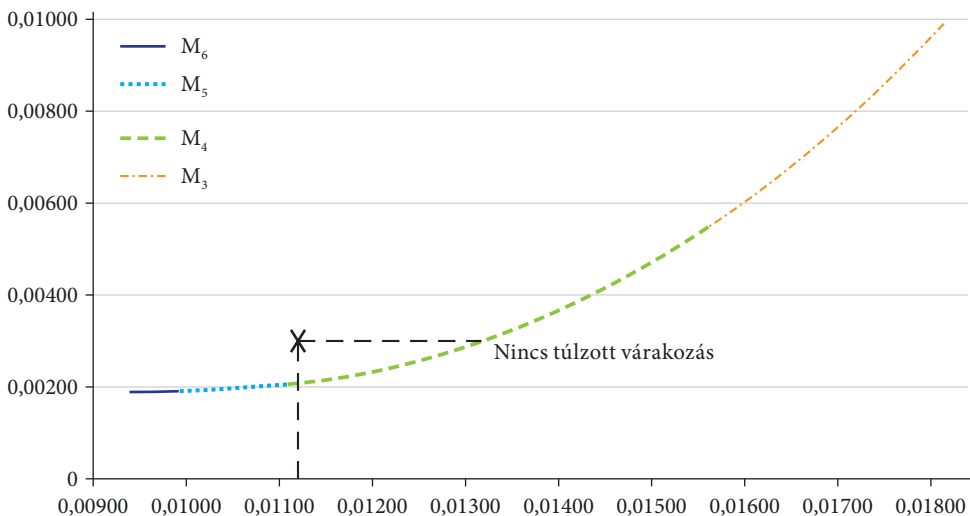
készült a 8. ábra, de a jobb áttekinthetőség kedvéért csak az $E = 0,01815$ hozamszintig, vagyis az M_3 halmaz végpontjáig mutatjuk be az értékeket. Az analízis érdekessége, hogy a $0,0093 < E < 0,01108$ hozamintervallumban mind az öt részvény aránya pozitív a portfólióban, tehát a hatékony felület shortolás nélkül is tartalmazza az öt részvényt. Mivel a shortolás megengedésével nyert (lehetetlennek nevezett) hatékony felület mindig öt részvényt tartalmaz, nincs tehát különbség a lehetséges, illetve a lehetetlen hatékony portfóliók között az M_5 halmaz által meghatározott intervallum felett. Sőt az M_5 halmaz előtt és után következő halmazok hatékony felületét összevetve az előjelkötetlen esettel, a két hatékony felület szinte egybeesik, a különbség nem is ábrázolható. Így nem alakulnak ki túlzott várakozások a pénzügyi piac teljesítményével szemben.

A piaci kapitalizációs adatokat használva meghatározható a BUX 5 teljesítménye: várható hozama 0,0112, és a hozzá tartozó szórásnégyzet 0,003. E kockázati szintet kivetítve a 8. ábrán az látható, hogy a hatékony felület e kockázati szintet az $E = 0,0137$ hozamszintnél éri el, vagyis nagyobb kockázat vállalása nélkül éves szinten a hozam 3 százalékponttal² lenne növelhető. Az M_4 halmaz által meghatározott részvények adják e teljesítményt, a (2b) képlet alapján pedig a százalékos összetétel is meghatározható: $x_{Opus} = 14,3$, $x_{OTP} = 29,6$, $x_{Richter} = 15,4$, $x_{MTele} = 40,7$.

A BUX 5 portfólió piaci teljesítménye tehát meglepően jó, hiszen a DAX esetében a különbség többszörös volt. Továbbá a BUX 5 esetében (az Opust tartalmazó szakasz kivételével) szinte nincs különbség a hatékony felületek között shortolással vagy a nélkül, ellentétben a DAX-szal, ahol a két hatékony felület között, különösen a magas hozamok régiójában, jelentős a különbség.

8. ábra

A BUX 5 hatékony felülete BUX 5-teljesítménnyel, 2015–2024



Megjegyzés: a vízszintes tengelyen a havi hozamok, a függőleges tengelyen pedig a szórásnégyzet szerepel.

² $(0,0137 - 0,0112) \cdot 12 = 0,03$.

4. táblázat
A BUX 5 hatékony felületének analitikus formája és szerkezete, 2015–2024

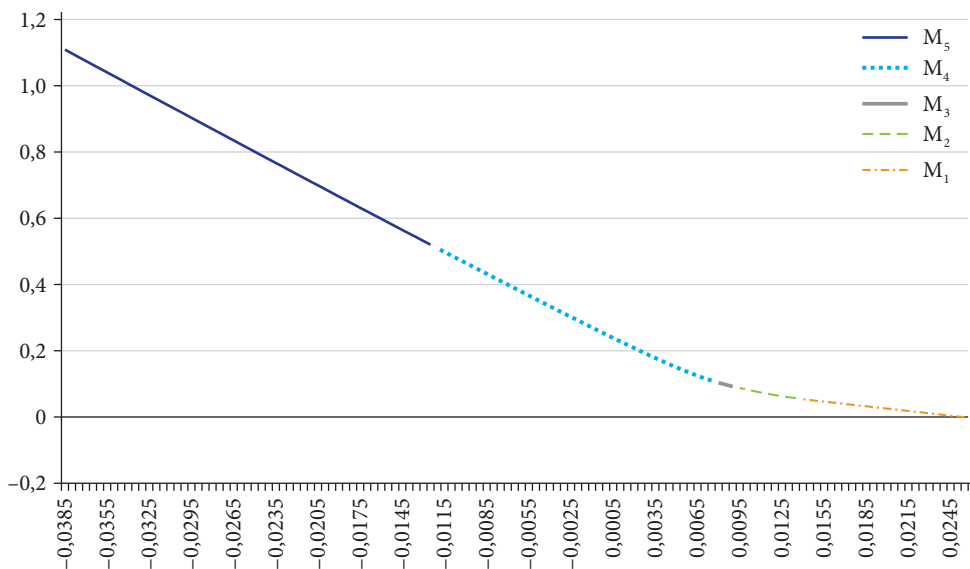
Kockázat nélküli havi kamatintervallumok (r)		A megfelelő havi hozamintervallumok (E)		A hatékony felület meghatározó részvények	e	f	d	A hatékony felület meghatározó analitikus forma – $V_R^{BUX}(E)$ függvény		
-tól	-ig	-tól	-ig					a	b	c
0,01348	0,02534	0,02534	0,02534	$M_1 = \{\text{OPUS}\}$	0,0143	22,2472	0,5637	0,0000	0,0000	0,0449
0,00897	0,01348	0,01815	0,02534	$M_2; \text{OTP}$	0,0369	146,7780	2,2421	376,6369	-11,5065	0,0947
0,00741	0,00897	0,01562	0,01815	$M_3; \text{MTELEK}$	0,0545	365,1831	4,2020	162,8426	-3,7475	0,0243
-0,01228	0,00741	0,01108	0,01562	$M_4; \text{RICHTER}$	0,0620	501,4799	5,2126	128,1587	-2,6643	0,0158
-0,03855	-0,01228	0,00993	0,01108	$M_5; \text{MOL}$	0,0670	534,3989	4,8082	42,2087	-0,7595	0,0053
$-\infty$	-0,03855	0,00940	0,00993	$M_6; \text{OTP} \rightarrow$	0,0605	530,0566	4,9756	72,4943	-1,3610	0,0083

A BUX 5 hatékony felülete analitikus formájának ismeretében meghatározhatjuk a Sharpe-hányados dinamikus alakulását a kamatlábak függvényében. A 4. táblázatban közölt e , f , d értékek alapján, ezeket szakaszonként az (5b) analitikus formulába helyettesítve kapjuk meg a Sharpe-hányados-függvényt, amelyet a 9. ábra mutat.

Láthatjuk, hogy amennyiben a Budapesti Értéktőzsde hatékony portfóliója esetén is a DAX-nál alkalmazott 10 éves állampapírhozamot használjuk (a 2015–2024-es időszakban havi 0,00053), a 9. ábra alapján adódó Sharpe-hányados 0,2385 lesz, amely jelentősen a német tőzsdén meghatározott érték alatt van.

9. ábra

A BUX 5 Sharpe-hányados-függvénye



Megjegyzés: a vízszintes tengelyen a kockázatmentes havi hozamok, a függőleges tengelyen a Sharpe-hányados értéke szerepel.

Következtetések

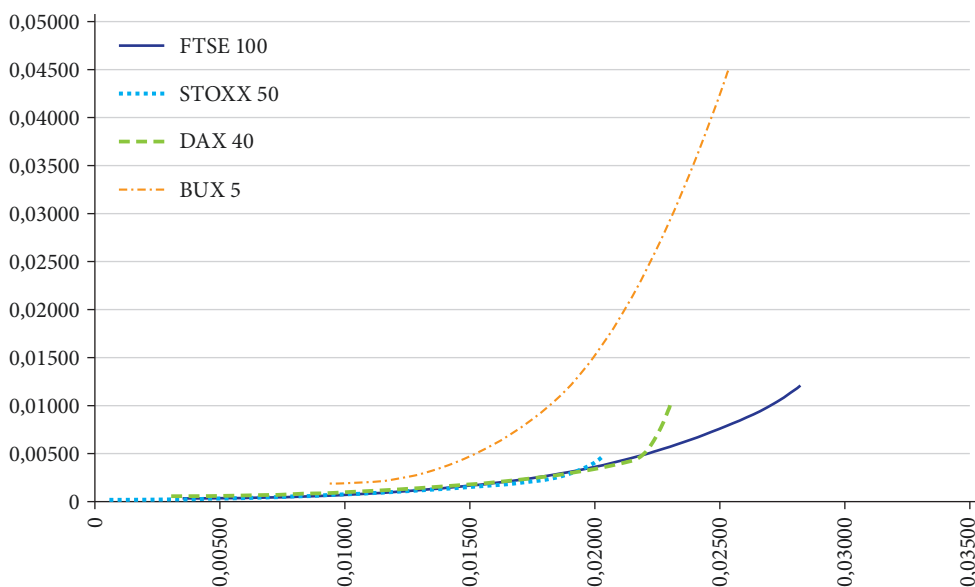
Ismereteink szerint e tanulmány elsőként adja közre mind a DAX 40, mind a BUX 5 hatékony felületét leíró analitikus formulákat, amikor shortolást nem engedünk meg. Meghatározó irodalmi források szerint a hatékony felületen fekvő piaci portfóliók nem is tartalmazhatnak negatív befektetési arányokat, és ezen úgynevezett lehetetlen portfóliók megengedése hozzájárulhat az empirikus megfigyelések és az elméleti következtetések közötti különbségek előfordulásához. Miként a DAX 40 csomag elemzése is megmutatta, a két hatékony felület között lényeges eltérés mutatkozik, ugyanakkor a BUX 5 alacsonyabb hozamú (valósághoz közeli) szegmenseiben a két megközelítés közötti különbség lényegtelen.

A hatékony felületek analitikus képletének ismerete lehetővé teszi a Sharpe-hányados dinamikus vizsgálatát, amelyen azt értjük, hogy a kockázat nélküli hozamok függvényeként előállíthatjuk a Sharpe-hányados-függvényt. Talán ismét kijelenthetjük, hogy elsőként, hiszen a Sharpe-hányados előállításához a hatékony felület néhány kulcsparaméterének ismerete szükséges, amit az analitikus formulák biztosítanak. A tízéves állampapírok hozamait felhasználva azt találtuk, hogy a DAX 40 Sharpe-hányadosa a 2022–2024-es periódusban mintegy 50 százalékkal magasabban alakult, mint a 2015–2024-es évekre vonatkozó.

A BUX 5 kosár 2015–2024-es évekre vonatkozó Sharpe-hányadosa viszont jóval kisebb, mint a DAX index, amiből arra következtethetünk, hogy az egységnyi kockázatra jutó hozam Budapesten jóval alacsonyabb, mint Frankfurtban. Jó hír viszont, hogy a BUX 5 piaci teljesítménye jóval közelebb van a hatékony felülethez, és jóval magasabb a DAX-énál. A BUX nemcsak a DAX-szal összehasonlítva kockázatos: a 10. ábra jól szemlélteti a többi pénzügyi piac alacsonyabb szintű kitétségét.

10. ábra

Különböző európai portfóliók hozam-kockázat felülete a 2015–2024-es időszak adatai alapján



Megjegyzés: a vízszintes tengelyen a havi hozamok, a függőleges tengelyen pedig a szórásnégyzet szerepel.

Hivatkozások

Bodnar, T., & Gupta, A. K. (2015). Robustness of the inference procedures for the global minimum variance portfolio weights in a skew-normal model. *The European Journal of Finance*, 21(13–14), 1176–1194. <https://doi.org/10.1080/1351847X.2012.696073>

- Bodnar, T., Mazur, S., & Okhrin, Y. (2017). Bayesian estimation of the global minimum variance portfolio. *European Journal of Operational Research*, 256(1), 292–307. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.05.044>
- Brennan, T. J., & Lo, A. W. (2010). Impossible frontiers. *Management Science*, 56(6), 905–923. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1100.1157>
- Buser, S. A. (1977). A simplified expression for the efficient frontier in mean-variance portfolio analysis. *Management Science*, 23(8), 901–904. <https://doi.org/10.1287/mnsc.23.8.901>
- Cesarone, F., Martino, M. L., & Tardella, F. (2023). Mean-variance-VaR portfolios: MIQP formulation and performance analysis. *OR Spectrum*, 45, 1043–1069. <https://doi.org/10.1007/s00291-023-00719-x>
- Duffie, D., & Pan, J. (1997). An overview of value at risk. *Journal of Derivatives*, 4(3), 7–49. <https://doi.org/10.3905/jod.1997.407971>
- Dybvig, P. H. (1984). Short sales restrictions and kinks on the mean variance frontier. *The Journal of Finance*, 39(1), 239–244. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1540-6261.1984.tb03871.x>
- Fama, E. F., & French, K. R. (1996). Multifactor explanations of asset pricing anomalies. *The Journal of Finance*, 51(1), 55–84. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1996.tb05202.x>
- Fama, E. F., & French, K. R. (2004). The capital asset pricing model: Theory and evidence. *Journal of Economic Perspectives*, 18(3), 25–46. <https://doi.org/10.1257/0895330042162430>
- Fama, E. F., & MacBeth, J. D. (1973). Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *Journal of Political Economy*, 81(3), 607–636. <https://doi.org/10.1086/260061>
- Guijarro, F. (2018). A similarity measure for the cardinality constrained frontier in the mean-variance optimization model. *Journal of the Operational Research Society*, 69(6), 928–945. <https://doi.org/10.1057/s41274-017-0276-6>
- Guijarro, F., & Tsinaslanidis, P. E. (2021). A surrogate similarity measure for the mean-variance frontier optimisation problem under bound and cardinality constraints. *Journal of the Operational Research Society*, 72(3), 564–579. <https://doi.org/10.1080/01605682.2019.1657367>
- Kerstens, K., Mounir, A., & Van de Woestyne, I. (2012). Benchmarking mean-variance portfolios using a shortage function: The choice of direction vector affects rankings. *Journal of the Operational Research Society*, 63(9), 1199–1212. <https://doi.org/10.1057/jors.2011.140>
- Lintner, J. (1965). Security prices, risk, and maximal gains from diversification. *The Journal of Finance*, 20(4), 587–615. <https://doi.org/10.2307/2977249>
- Markowitz, H. (1956). The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3(1-2), 111–133. <https://doi.org/10.1002/nav.3800030110>
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: Efficient diversification of investment*. John Wiley & Sons.
- Markowitz, H. (2005). Market efficiency: A theoretical distinction and so what? *Financial Analysts Journal*, 61(5), 17–30. <https://doi.org/10.2469/faj.v61.n5.2752>
- Markowitz, H. M., & Todd, G. P. (2000). *Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets*. F. J. Fabozzi Associates.
- Merton, R. C. (1972). An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7(4), 1851–1872. <https://doi.org/10.2307/2329621>
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34(4), 768–783. <https://doi.org/10.2307/1910098>
- Qi, Y., Hirschberger, M., & Steuer, R. E. (2009). Dotted representation of mean-variance efficient frontiers and their computation. *INFOR*, 47(1), 15–21. <https://doi.org/10.3138/infor.47.1.15>

- Qi, Y., & Steuer, R. E. (2020). On the analytical derivation of efficient sets in quad-and-higher criterion portfolio selection. *Annals of Operations Research*, 293(2), 521–538. <https://doi.org/10.1007/s10479-018-3101-y>
- Qi, Y., & Steuer, R. E. (2025). An analytic derivation of properly efficient sets in multi-objective portfolio selection. *Annals of Operations Research*, 346(2), 1573–1595. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10479-024-05848-2>
- Qi, Y., Steuer, R. E., & Wimmer, M. (2017). An analytical derivation of the efficient surface in portfolio selection with three criteria. *Annals of Operations Research*, 251(1-2), 161–177. <https://doi.org/10.1007/s10479-015-1900-y>
- Qi, Y., Zhang, Y., & Zhang, S. (2024). Theoretically scrutinizing kinks on efficient frontiers and computationally reporting nonexistence of the tangent portfolio for the capital asset pricing model by parametric-quadratic programming. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 41(2), 2350012. <https://doi.org/10.1142/S0217595923500124>
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21–42. <https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038>
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 1443–1471. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00271-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6)
- Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13(3), 341–360. [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(76\)90046-6](https://doi.org/10.1016/0022-0531(76)90046-6)
- Sharpe, W. F. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, 9(2), 277–293. <https://doi.org/10.1287/mnsc.9.2.277>
- Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425–442. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>
- Sharpe, W. F. (1970). *Portfolio theory and capital markets*. McGraw-Hill.
- Steuer, R. E. (1986). *Multiple criteria optimization: Theory, computation, and application*. John Wiley & Sons.
- Steuer, R. E., Qi, Y., & Wimmer, M. (2024). Computing cardinality constrained portfolio selection efficient frontiers via closest correlation matrices. *European Journal of Operational Research*, 313(2), 628–636. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.08.026>
- Vörös, J. (1986). Portfolio analysis: An analytic derivation of the efficient portfolio frontier. *European Journal of Operational Research*, 23(3), 294–300. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(86\)90123-1](https://doi.org/10.1016/0377-2217(86)90123-1)
- Vörös, J., & Rappai, G. (2026). *On the differentiability of the portfolio efficient frontier*. Manuscript submitted for publication.
- Vörös, J., Kriens, J., & Strijbosch, L. W. G. (1999). A note on the kinks at the mean-variance frontier. *European Journal of Operational Research*, 112(1), 236–239. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00389-5](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00389-5)
- Zhang, W.-G., & Nie, Z.-K. (2004). On admissible efficient portfolio selection policy. *Applied Mathematics and Computation*, 159(2), 357–371. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.10.019>
- Zhang, W.-G., & Wang, Y.-L. (2008). An analytic derivation of admissible efficient frontier with borrowing. *European Journal of Operational Research*, 184(1), 229–243. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.09.058>

Függelék

F1. táblázat

A DAX 40 részvények átlagos hozama és a kibocsátók kapitalizációjának aránya^a

Vállalat	Jelölés (ticker)	Átlagos havi hozam	Kapitalizációs hányad
Adidas	ADS	0,0119	0,018613
Airbus	AIR.PA	0,0105	0,066253
Allianz	ALV	0,0064	0,055958
BASF	BAS	-0,0044	0,025099
Bayer	BAYN	-0,0147	0,020792
Beiersdorf	BEI	0,0042	0,018263
BMW	BMW	-0,0023	0,038263
Brenntag	BNR	0,0019	0,006932
Commerzbank	CBK	0,0047	0,008745
Continental	CON	-0,0080	0,008946
Deutsche Börse	DB1	0,0105	0,020575
Deutsche Bank	DBK	-0,0016	0,015175
DHL Group (ex Deutsche Post)	DHL	0,0016	0,031780
Deutsche Telekom	DTE	0,0062	0,067038
Daimler Truck	DTG	0,0023	0,016325
Siemens Energy	ENR	0,0077	0,005486
E.ON	EOAN	-0,0007	0,019576
Fresenius	FRE	-0,0026	0,009713
Heidelberg Materials	HEI	0,0061	0,009082
Henkel	HEN3	-0,0016	0,017271
Hannover Rück	HNR1	0,0097	0,016135
Infineon	IFX	0,0097	0,027525
Mercedes-Benz Group (ex Daimler)	MBG	-0,0011	0,039598
Merck	MRK	0,0042	0,037203
MTU Aero Engines	MTX	0,0117	0,006341
Münchener Rückversicherungs-Gesellschaft	MUV2	0,0090	0,031462
Porsche	P911	-0,0024	0,041478
Porsche Automobil	PAH3	-0,0056	0,008460
QIAGEN	QIA	0,0054	0,005515
Rheinmetall	RHM	0,0248	0,007953
RWE	RWE	0,0016	0,018210
SAP	SAP	0,0128	0,096349
Siemens Healthineers	SHL	0,0044	0,034583

Az F1. táblázat folytatása

Vállalat	Jelölés (ticker)	Átlagos havi hozam	Kapitalizációs hányad
Siemens	SIE	0,0076	0,071577
Sartorius	SRT3	0,0191	0,011689
Symrise	SY1	0,0044	0,008164
Vonovia	VNA	0,0031	0,013266
Volkswagen	VOW3	-0,0058	0,035705
Covestro	X1COV	0,0059	0,005933
Zalando	ZAL	0,0034	0,002969

^a Hozamok a 2015. január 1. – 2024. december 31. időszak adatai, kapitalizációs hányad a 2025 január 1-i adatok alapján.

Forrás: <https://www.boerse.de/marktkapitalisierung/Dax-Aktien/>

F2. a) táblázat

A BUX 5 részvények átlagos hozama és a kibocsátók kapitalizációjának aránya a 2015–2024-es időszakban

Részvény	Átlagos havi hozam	Kapitalizációs hányad
MOL	0,0052	0,2185
MTELEKOM	0,0109	0,0968
OPUS	0,0253	0,0331
OTP	0,0143	0,4379
RICHTER	0,0091	0,2138

Forrás: <https://bet.hu/>

F2. b) táblázat

A BUX 5 részvények kovarianciamátrixa a 2015–2024-es időszakban

	MOL	MTELEKOM	OPUS	OTP	RICHTER
MOL	0,0048	0,0012	0,0034	0,0034	0,0014
MTELEKOM	0,0012	0,0029	0,0023	0,0020	0,0009
OPUS	0,0034	0,0023	0,0449	0,0031	0,0002
OTP	0,0034	0,0020	0,0031	0,0072	0,0018
RICHTER	0,0014	0,0009	0,0002	0,0018	0,0035

Forrás: <https://bet.hu/>