

Matematikai modellektől a tanulóselemzésig

Összefoglalás: A matematikai modellezés alapvető módszertani eszköz, amelyet a természeti és társadalmi jelenségek mélyreható megértésére és elemzésére alkalmazunk. Az összetett rendszerek egyszerűsítése révén a matematikai modellezés lehetőséget nyújt arra, hogy a különféle változók közötti kapcsolatokat felfedezzük és a rendszer viselkedését előre jelezzük, így különösen hasznos olyan meglepőnek tűnő területeken, mint a tanulóselemzés.

Kulcsszavak: Matematikai modell, determinisztikus modell, tanulóselemzés.

Abstract: Mathematical modeling is a fundamental methodological tool employed for the in-depth understanding and analysis of natural and social phenomena. By simplifying complex systems, mathematical modeling facilitates the discovery of relationships between various variables and enables the prediction of system behavior. This approach proves particularly useful in seemingly unexpected fields, such as learning analytics.

Keywords: Mathematical model, deterministic model, learning analytics.

Bevezetés

A matematikai modellezés kulcsfontosságú eszköz a természeti és társadalmi jelenségek mélyebb megértéséhez. Lehetővé teszi számunkra, hogy összetett rendszereket egyszerűbb, matematikai formába öntsünk, így könnyebben azonosíthatjuk a változók közötti kapcsolatokat és előre jelezhetjük a rendszer viselkedését. A klímaváltozás vizsgálatától [1] kezdve a gazdasági folyamatok [2] elemzéséig, a matematikai modellek segítenek megérteni, hogyan alakul a világ körülöttünk. Emellett a mérnöki tudományokban [3] és az orvostudományban [4] is elengedhetetlenek az optimalizálási feladatok megoldásában és új technológiák kifejlesztésében.

* Dunaújvárosi Egyetem, Informatikai Intézet; Budapesti Gazdasági Egyetem, Alkalmazott Kvantitatív Módszerek Tanszék; Óbudai Egyetem, Elektrofizikai Intézet, Természettudományi Tanszék
E-mail: nagy.balint@uniduna.hu

** Dunaújvárosi Egyetem, Tanárképző Központ; Pécsi Tudományegyetem, Oktatás és Társadalom Neveléstudományi Doktori Iskola
E-mail: kocsoe@uniduna.hu

[1] Vallis, G. K. (1988): Conceptual models of El Niño and the southern oscillation. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 93., (11.), pp. 13979–13991.

[2] Bouali, S.–Buscarino, A.–Fortuna, L.–Frasca, M.–Gambuzza, L. V. (2012): Emulating complex business cycles by using an electronic analogue. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 13., (6.), pp. 2459–2465.

[3] Joós, A. (2022): On packing of unequal squares in a rectangle. *Acta Polytechnica Hungarica*, 19., (1.).

[4] Olde Scheper, T.–Klinkenberg, D.–Pennartz, C.–Van Pelt, J. (1999): A mathematical model for the intracellular circadian rhythm generator. *Journal of Neuroscience*, 19., (1.), pp. 40–47.

[5] Demšar, I.–Bernik, R.–Duhovnik, J. (2012): A mathematical model and numerical simulation of the static stability of a tractor. *Agri-culturalae Conspetus Scientificus*, 77., (3.), pp. 143–150.

[6] Beran, B.–Kargi, F. (2005): A dynamic mathematical model for wastewater stabilization ponds. *Ecological modelling*, 181., (1.), pp. 39–57.

[7] Brodie, M. A.–Walmsley, A.–Page, W. (2008): Dynamic accuracy of inertial measurement units during simple pendulum motion. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*, 11., (3.), pp. 235–242.

[8] Newman, K. B.–Buckland, S. T.–Morgan, B. J.–King, R.–Borchers, D. L.–Cole, D. J.–Thomas, L. (2014): Modelling population dynamics. *Modelling Population Dynamics: Model Formulation, Fitting and Assessment using State-Space Methods*. New York: Springer, pp. 169–195.

[9] Xepapadeas, A. (2005): Economic growth and the environment. *Handbook of environmental economics*, 3., pp. 1219–1271.

[10] Srivastava, R.–You, L.–Summers, J.–Yin, J. (2002): Stochastic vs. deterministic modeling of intracellular viral kinetics. *Journal of theoretical biology*, 218., (3.), pp. 309–321.

[11] Gonze, D.–Halloj, J.–Goldbeter, A. (2002): Deterministic versus stochastic models for circadian rhythms. *Journal of biological physics*, 28., pp. 637–653.

[12] Beckmann, M. (1952): A continuous model of transportation. *Econometrica. Journal of the Econometric Society*, pp. 643–660.

A matematikai modelleket rendkívül sokféle formában alkalmazzák, és a modellezni kívánt rendszer jellegétől, a rendelkezésre álló adatok mennyiségétől és minőségétől, valamint a vizsgálat céljától függően különböző típusokat használnak. A megfelelő modell kiválasztása alapvetően meghatározza a vizsgálat sikerességét, hiszen a pontosság és a megbízhatóság szempontjából a rendszer komplexitását figyelembe véve kell dönteni.

A matematikai modellek alapvetően két nagy csoportba sorolhatók: statikus és dinamikus modellekre. A statikus modellek [5] egy adott pillanatban rögzített állapotot írnak le, ahol a változók értékei nem változnak az időben. Ezek a modellek például hasznosak lehetnek épületek statikai számításainál, termékek keresleti-kínálati viszonyainak elemzésekor vagy más olyan helyzetekben, ahol az időbeli változások nem relevánsak. A dinamikus modellek [6] ezzel szemben az időbeli változásokat is figyelembe veszik, és gyakran differenciálegyenletekkel írják le a folyamatokat. Ilyen modellekkel jellemezhetők például a fizikai rendszerek mozgásai [7], a populációdinamikai folyamatok [8], valamint a gazdasági növekedési modellek is [9]. A matematikai modellek másik osztályozása szerint a modell lehet determinisztikus és sztochasztikus. [10] A determinisztikus modellek esetében a kimenetek egyértelműen meghatározhatók a bemeneti adatok alapján, vagyis nincs véletlenszerűség a rendszer viselkedésében. Például egy egyszerű inga mozgása pontosan megjósolható, ha ismerjük a kezdeti feltételeket. Ezzel szemben a sztochasztikus modellek figyelembe veszik a véletlen eseményeket is, és valószínűségi változókkal, valamint statisztikai módszerekkel dolgoznak. [11] Ilyen modellek használatosak például a pénzfeldobás eredményének vagy a tőzsdei árfolyamok előrejelzésénél, ahol a véletlen tényezők is befolyásolják az eredményt.

Fontos különbséget tenni a diszkrét és a folytonos modellek között. [12]

A diszkrét modellek olyan rendszereket írnak le, ahol a változók csak meghatározott értékeket vehetnek fel, például egész számokat. Ilyen lehet például egy közösségi hálózatban a barátságok száma vagy egy digitális kép pixeleinek intenzitása.

A folytonos modellek [13] ezzel szemben olyan rendszereket írnak le, ahol a változók tetszőleges értékeket vehetnek fel egy adott intervallumon belül, mint például egy hőmérséklet időbeli változása vagy egy folyadék áramlása egy csőben.

A matematikai modellek kiválasztása során figyelembe kell venni a vizsgált rendszer komplexitását, a rendelkezésre álló adatok mennyiségét és minőségét, valamint a modellezés célját. A megfelelő modell kiválasztása kulcsfontosságú a pontos és megbízható eredmények eléréséhez.

Számos konkrét matematikai modell is létezik, amelyek különböző célokra használhatók. Ilyen például a lineáris regresszió, amely egyszerű lineáris kapcsolatok modellezésére szolgál. A differenciálegyenletek olyan fizikai, kémiai és biológiai folyamatok leírására használhatók, mint például a rádióaktív bomlás vagy a populációnövekedés. Parciális differenciálegyenleteket alkalmazunk például hővezetési vagy áramlástan jelenségek modellezésére. Hálózati modellek segítségével kapcsolatok és áramlások modellezhetők, például közlekedési vagy szociális hálózatokban. A szimulációs modellek különösen hasznosak komplex rendszerek, például gazdasági vagy éghajlati folyamatok viselkedésének szimulálására, de az tanulóelemzési alkalmazások is jelentősek. [14, 15]

A matematikai modellezés tehát rendkívül sokoldalú eszköz, amely számos tudományterületen alkalmazható a jelenségek megértéséhez, előrejelzéséhez és optimalizálásához. A jövőben várhatóan még szélesebb körben fogják használni ezeket a módszereket, hiszen a komplex rendszerek egyre pontosabb és részletesebb megértéséhez elengedhetetlenek a fejlett matematikai modellek.

Determinisztikus modellekről

A determinisztikus modellek kulcsszerepet töltenek be a tudomány és a mérnöki gyakorlat számos területén. Ezek a modellek olyan rendszereket írnak le, amelyek viselkedését a kezdeti feltételek és a rendszer paraméterei egyértelműen meghatározzák, így nincs bennük véletlenszerűség. Ez azt jelenti, hogy ha ugyanazokkal a feltételekkel futtatunk egy determinisztikus modellt többször, minden alkalommal ugyanazt az eredményt kapjuk.

[13] Shieh, L. S.–Wang, H.–Yates, R. E. (1980): Discrete-continuous model conversion. *Applied Mathematical Modelling*, 4., (6.), pp. 449–455.

[14] Dæhlen, A.–Heldal, I.–Rehman, A.–Ali, Q.–Katona, J.–Kővári, A.–Costescu, C. (2024, June): Towards More Accurate Help: Informing Teachers how to Support NDD Children by Serious Games and Eye Tracking Technologies. In: *Proceedings of the 2024 Symposium on Eye Tracking Research and Applications*. pp. 1–7.

[15] Katonáné Gyöngyösrű, K. I. (2024): The Role of AI-based Adaptive Learning Systems in Digital Education. *Journal of Applied Technical and Educational Sciences*, 14., (2.), pp. 1–12.

A determinisztikus modellek jelentőségét több tényező is kiemeli. Először is, ezek a modellek lehetővé teszik, hogy rendkívül pontos előrejelzéseket készítsünk. Ha ismerjük a rendszer összes releváns paraméterét, akkor a modell segítségével pontosan meghatározhatjuk a rendszer jövőbeni viselkedését.

Ez különösen fontos olyan területeken, mint a fizika, ahol például egy bolygó pályájának kiszámítása a klasszikus mechanika törvényei alapján determinisztikus modellekkel történik. Másodszor, a determinisztikus modellek hozzájárulnak a rendszerek mélyebb megértéséhez. Ezek a modellek leegyszerűsített, matematikai formában írják le a valóságot, lehetővé téve, hogy azonosítsuk a legfontosabb összetevőket és azok közötti kapcsolatokat. Ezzel segítenek rávilágítani arra, hogyan működnek a rendszerek, és hogyan befolyásolják egymást a különböző tényezők.

A determinisztikus modellek gyakorlati előnyei közé tartozik az optimalizálás lehetősége is. Ezek a modellek segíthetnek meghatározni, hogy egy rendszer milyen paraméterekkel működhet a leghatékonyabban. Például egy mérnöki tervezés során használhatjuk őket arra, hogy kiszámítsuk egy szerkezet optimális szilárdságát vagy egy folyadékáramlás optimális feltételeit.

Ezen túlmenően, a determinisztikus modellek szimulációk során is hasznosak. Különböző forgatókönyveket szimulálva értékelhetjük a különböző döntések következményeit, anélkül, hogy valós kísérleteket kellene végrehajtanunk. Ez különösen hasznos a mérnöki tudományok területén, ahol a rendszerek viselkedésének előzetes vizsgálata létfontosságú lehet.

A fizikában a klasszikus mechanika törvényei alapján leírt mozgások, mint egy bolygó pályája, jól modellezhetők determinisztikusan. A mérnöki tudományokban szerkezetek szilárdságának számítása vagy folyadékáramlások szimulálása is ilyen modelleken alapul. A kémiában a reakciókinetikai modellek segítenek megjósolni a reakciók sebességét és kimenetelét, míg a gazdaságtanban egyszerű gazdasági modellek, mint a kínálat és kereslet viszonyának leírása, szintén determinisztikus módszerekkel történik.

Nem minden rendszer viselkedése írható le pontosan determinisztikus modellekkel. A valós világban gyakran előfordulnak véletlenszerű események, amelyeket ezek a modellek nem képesek kezelni. Ilyen esetekben sztochasztikus modellekre van szükség, amelyek a véletlen eseményeket is figyelembe veszik, és valószínűségi alapon dolgoznak.

Differenciálegyenletekről

Számos tudományágban a különböző jelenségek leírására és megértésére a differenciálegyenleteket mint a determinisztikus modellek legfontosabb eszközét alkalmazzák. Ennek egyik fő oka, hogy a differenciálegyenletek kiválóan alkalmasak időben változó rendszerek modellezésére. A differenciálegyenletek egyik erőssége, hogy lehetővé teszik egy rendszerben fellelhető összefüggések ok-okozati megértését.

Ezzel a módszerrel kifejezhetjük, hogyan függnek össze a rendszer különböző változói, ami mélyebb betekintést nyújt a rendszer működésébe. Például fizikában a Newton-törvényeket, differenciálegyenletekkel lehet felírni, amelyek világosan megmutatják, hogyan hatnak egymásra a különböző erők és mozgások.

A differenciálegyenletek precíz előrejelzéseket tesznek lehetővé. Ha ismerjük a megfelelő kezdeti feltételeket és paramétereket, akkor ezekkel az egyenletekkel pontosan megjósolhatjuk, hogyan fog viselkedni egy rendszer a jövőben. Az optimalizálási feladatok megoldásában is kulcsszerepük van, hiszen differenciálegyenletek segítségével meghatározhatjuk, hogy milyen paramétereket kell beállítani egy rendszerben ahhoz, hogy az a lehető leghatékonyabban működjön. Egy mérnöki rendszer tervezésekor ez elengedhetetlen a hatékonyság növeléséhez és a költségek minimalizálásához.

A differenciálegyenletek rendkívül sokoldalúan alkalmazható eszköznek bizonyulnak, mivel a fizikától kezdve a kémián és biológián, a közgazdaságtanon át egészen a mérnöki tudományokig számos tudományágban találunk alkalmazási példákat. A fizikában a korábban már említett Newton-törvények, a Maxwell-egyenletek és a Schrödinger-egyenlet mind differenciálegyenleteken alapulnak.

A kémiában a reakciókinetikai és diffúziós egyenletek, a biológiában pedig populációdinamikai és neurobiológiai modellek használják ezt a módszert. A mérnöki tudományokban hővezetési, áramlástan egyenletek és rezgőmozgások leírására használják, míg a közgazdaságtanban gazdasági növekedési modellek alapulnak differenciálegyenleteken.

A differenciálegyenletek legegyszerűbb típusát, a közönséges differenciálegyenleteket (KDE) rendkívül széles körben alkalmazzák, ezek számos tudományágban segítenek a különféle jelenségek modellezésében és megértésében. A KDE-k segítségével pontosan modellezhetők olyan folyamatok, ahol a változók időben folytonosan változnak. A KDE-k hatékonyan fejezik ki az ok-okozati összefüggéseket egy rendszerben, ezáltal pontos előrejelzéseket tesznek lehetővé. A KDE-k hatékonysága abban rejlik, hogy egy komplex rendszert egyetlen egyenlettel képesek kifejezni, amely koncentráltan tartalmazza a legfontosabb összefüggéseket. A differenciál-, és integrálszámítás eszköztára lehetőséget nyújt ezen egyenletek jelentős részének megoldására, de csak bizonyos típusú KDE-ket tudunk szimbolikusan megoldani. Csak speciális alakú, például lineáris vagy elválasztó változók módszerével megoldható egyenletet tudunk analitikus megoldással kezelni, míg nemlineáris, magasabb rendű egyenletek esetében a megoldások gyakran nem fejezhetők ki egyszerű, zárt alakú képletekkel.

A számítógépek elterjedésével azonban a numerikus módszerek gyors fejlődésen mentek keresztül, lehetővé téve a közelítő megoldások keresését olyan KDE-k esetében is, amelyeket analitikusan nem tudunk megoldani. Ennek köszönhetően a KDE-k alkalmazhatósága jelentősen kibővült, hiszen a numerikus módszerek segítségével szimulálhatjuk a rendszerek viselkedését, és értékes információkat nyerhetünk, még ha az analitikus megoldást nem is ismerjük.

A szimbolikus megoldások előnye a pontos megoldás és az általános érvényesség, hiszen ezek a megoldások nem tartalmazznak numerikus hibákat, ugyanakkor a numerikus módszerek elengedhetetlenek a komplexebb problémák megoldásához, ahol a szimbolikus módszerek gyakran nem adnak megoldást, vagy nem kezelhető megoldást adnak.

További alkalmazások

A biológiai tudományokban széles körben alkalmazzák a közönséges differenciálegyenleteket, mivel ezek hatékony eszközt nyújtanak a rendszerekben zajló folyamatok modellezéséhez. A közönséges differenciálegyenletek különösen hasznosak a folytonosan változó biológiai folyamatok leírására, valamint az ok-okozati összefüggések megértésére, amelyek a különböző biológiai változók között fennállnak.

Az egyik kiemelt terület a populációdinamika, ahol a populációk növekedését, csökkenését és a különböző fajok közötti kölcsönhatásokat, például a versengést, ragadozást vagy mutualizmust vizsgálják. Ilyen esetekben gyakran alkalmazzák a logisztikus növekedési modellt, valamint a Lotka–Volterra-egyenleteket, amelyek a ragadozó–zsákmány rendszerek dinamikáját írják le.

Az epidemiológia, a járványok terjedését, a fertőzöttek számának változását, valamint a betegségek elleni védekezés hatékonyságát modellező terület szintén a differenciálegyenleteket alkalmazza. Például a SIR-modell a fertőző betegségek terjedését modellezi, különválasztva a fogékony, fertőzött és gyógyult (Susceptible (S), Infected (I) and Recovered (R)) egyéneket.

A neurobiológiában az idegsejtek közötti jelátvitelt, a neuronhálózatok működését és az agyi folyamatokat írják le differenciálegyenletekkel, míg a farmakokinetika területén a gyógyszerek szervezetben való eloszlását, lebontását és kiürülését vizsgálják ezekkel az eszközökkel. Hasonlóan fontos szerepet játszanak a fiziológiai folyamatok, például a vérnyomás változásának, a hormonkoncentrációk ingadozásának és a légzés ritmusának modellezésében is. A fejlődésbiológiában a sejtek növekedését, osztódását és differenciálódását leíró modellekben szintén gyakran alkalmazznak közönséges differenciálegyenleteket. Mindezek a példák jól mutatják, hogy a közönséges differenciálegyenletek nélkülözhetetlen eszközök a biológiai tudományokban. Segítenek megérteni a biológiai rendszerek működését, előre jelezni a változásokat, és optimalizálni a beavatkozásokat. Ahogy a biológiai kutatások fejlődnek, ezek a modellezési módszerek várhatóan még nagyobb szerepet fognak játszani a jövőbeli tudományos eredmények elérésében.

Élőlények napi ciklusának modellezése esetén először adatokat gyűjtünk az élőlény napi ritmusairól, például hormonkoncentrációkról vagy mozgásaktivitásról. Ezután egy vagy több közönséges differenciálegyenletet állítunk fel, amelyek az adott mechanizmusokat írják le. A modell paramétereit az adatokhoz igazítjuk, például regressziós vagy optimalizációs módszerekkel.

A modell validálása során összehasonlítjuk az előrejelzéseket a valós adatokkal. Végül a validált modellt szimulációkhoz használjuk, hogy különböző feltételek mellett vizsgálhassuk a rendszer viselkedését.

A matematikai eszközök alkalmazása a társadalomtudományokban is segít rendszerezni és elemezni a bonyolult jelenségeket, elősegítve a pontosabb megértést és a predikciót. Különböző matematikai modellekkel szimulálható az emberi viselkedés, a társadalmi és gazdasági rendszerek működése, vagy éppen a döntéshozatal.

Az ilyen modellek segítenek megérteni, hogyan reagálnak egyes rendszerek változásokra, például politikai intézkedésekre vagy gazdasági sokkokra.

A hálózatok vizsgálata matematikai gráfelméleten alapul, és segít megérteni a társadalmi kapcsolatok, például barátságok, szakmai kapcsolatok vagy információáramlás szerkezetét és dinamikáját. A játékelmélet az egyéni döntések és a társadalmi kölcsönhatások modellezését teszi lehetővé. Ezt alkalmazzák gazdasági döntések, politikai stratégiák és konfliktuskezelés területén is, hiszen segít feltárni, hogyan viselkednek a szereplők stratégiai helyzetekben.

A neveléstudományokban több más mellett a tanuláselemzés is matematikai alapokon nyugszik. A tanuláselemzés olyan adatközpontú megközelítés, ami az oktatási folyamatok, a tanulói teljesítmény és az oktatási környezetek javítására összpontosít. Célja, hogy a rendelkezésre álló adatok elemzésével támogassa az oktatást és magát a tanulási folyamatot. Tanuláselemzés során adatokat gyűjtünk a tanulókról – elsősorban online platformokon végzett – tevékenységeiről, például teszteredményeikről, tanulói viselkedésmintáikról (tartalmak, videók megtekintése, feladatok elvégzése, kérdőívválaszok), vagy beíratkozási statisztikáikról, korábbi kurzusok sikerességéről (Mihalovicsné Kollár–Váraljai 2020). Ezek az adatok gyakran valós időben kerülnek rögzítésre, ami lehetővé teszi az azonnali beavatkozásokat. A tanuláselemzés egyik fontos célja a tanulói teljesítmény pontosabb és átfogóbb értékelése, a prediktív modellalkotás. Ezzel előrejelezhetők bizonyos eredmények: mely tanulók esetében nagyobb a kockázata a lemorzsolódásnak, vagy ki lesz valószínűleg sikeres egy adott tantárgyban, így az oktatók szükség szerint beavatkozhatnak, egyéni fejlesztési tervet készíthetnek, ha szükséges.

Az analitikai rendszerek képesek valós időben felismerni a tanulók szükségleteit és ennek megfelelően adaptálni az oktatási tartalmat. Ez különösen hasznos az online tanulási platformokon, ahol az elemzés alapján a rendszer automatikusan és adaptívan alkalmazkodhat a tanuló aktuális szintjéhez.

Ezzel különböző nehézségű feladatok javasolhatóak, megvalósíthatóak egyéni tanulási utak és a differenciált oktatás. A tanuláselemzés támogathatja az oktatási vezetők, iskolai adminisztrátorok és döntéshozók munkáját is. Az adatok segítenek meghatározni, mely módszerek és eszközök működnek a legjobban, ezek alapján pedig optimalizálni lehet az erőforrásokat a tantárgyfejlesztésben.

Mivel a tanulóelemzés esetenként rengeteg személyes adatot gyűjt a tanulókról, alkalmazása komoly adatvédelmi és etikai kérdéseket is felvet. Fontos, hogy az adatgyűjtés átlátható és biztonságos legyen, valamint tiszteltben tartsa a tanulók magánéletét. A tanulóelemzés a fentiek miatt a modern oktatási rendszerek egyre fontosabb eszközévé válik, amely támogatja a tanulói sikerességet, a személyre szabott tanulást és a tudatos oktatási döntéshozatalt. Az adatvezérelt oktatási rendszerek gyorsan fejlődnek, várhatóan egyre nagyobb szerepet kapnak az oktatás minden szintjén.

Összefoglalás

A dolgozatban áttekintettük a matematikai modellek széleskörű alkalmazásának néhány jellegzetes esetét. Mivel a determinisztikus modellek egyértelmű eredményt adnak ismételt futtatás esetén, kulcsszerepet játszanak a fizikai, mérnöki, kémiai és gazdasági rendszerek tanulmányozásában. Ezen modellek az optimalizálásban is nélkülözhetetlenek, segítve a rendszerek legjobb működési feltételeinek meghatározását. Ugyanakkor a valóság komplexitása és véletlenszerűsége sok esetben sztochasztikus megközelítést igényel. A differenciálegyenletek precíz előrejelzéseket tesznek lehetővé, és segítségükkel feltárhatók a rendszerek belső ok-okozati összefüggései.

A matematika alkalmazásának lehetőségei állandóan bővülnek, segítve többek között a pedagógiai tudományokat is.

