

Meddig folytatható a szukcesszív szintézis?

DOI: <https://doi.org/10.70510/mfsz.19749>

A szukcesszív szintézis fogalma Kant kritikai rendszerében különös jelentőséggel bír: az egész tapasztalatfolyamat meghatározza. Azt igyekszem megmutatni, hogy e gondolat fenomenológiailag is tartható. Ehhez azonban a szukcesszió fogalmának egy olyan, Georg Cantor által bevezetett változatára van szükség, amelyet Kant még nem ismerhetett. (Valójában még az általa implicit módon használt szukcesszió-fogalom részleteit is csak jóval később dolgozta ki Giuseppe Peano és Gottlob Frege.) E ténynek természetesen nem csupán Kant gondolataival kapcsolatban van jelentősége, hiszen például ha az elme működését valamiféle algoritmus alapján szeretnénk felfogni, akkor szükségképpen a hagyományos, Kant által is használt értelemben szukcesszívnek kellene tekintenünk. Az itt körvonalazott elképzelésből következik, hogy ez nem lehetséges. A jelen mondanivalóm megfogalmazásához azonban nem kell sem a Kant, sem a Cantor által alkalmazott szukcesszió, illetve progressziófogalom összes részletét megismerni: elegendő csupán egymással való kontrasztjukban, szemléletes módon bevezetni őket.

Az általam vizsgált kanti tézis tehát azzal a formulával foglalható össze, hogy a tapasztalat minden részletében szukcesszív szintézis eredménye.¹ E nézetet Kant a *Tiszta ész kritikájában* két fontos gondolatcsoport segítségével támasztja alá. Egyrészt fogalmi szintézisekről, másrészt az ezzel meglehetősen spekulatív módon összekapcsolt szemléleti-érzéki szintézisekről beszél.

I. FOGALMISÁG ÉS SZUKCESSZIÓ

Ami az előbbit illeti, Kant rendszerében ez maga is két lépést foglal magában. A szintézis fogalma elsőként a kategóriák tárgyalásakor jut döntő szerephez, hiszen a kategóriák nem is mások, mint a képzeleteink között létesülő különféle szintetikus egységek funkciói. E tapasztalati egységformákról azonban Kant

¹ Lásd például: Kant 2004. A412/B439.

azonnal kijelenti, hogy párhuzamosak az ítéleteinkben megjelenő egységformákkal. Sőt, azok a funkciók, melyek az előbbiekéért felelnek, azonosak azokkal, amelyek az utóbbiakéért felelősek. „A funkció, mely egy *ítéletben* egységesít különböző képzeteket, azonos azzal, amely különböző képzetek puszta szintézisét egyetlen *szemléletben* egységesíti.” (Kant 2004. B104–105/A79.) Éppen ezért lehet a tapasztalatban adott fogalmi egységek különféle formáit – a transzcendentális fogalmakat – az ítéletekben megjelenő különféle egységekből dedukálni. Már az ítéleteinkben megjelenő nyelvi egység is különféle szintézisek eredményeképpen jelenik meg. Ebben az esetben a szintézis nem csupán (transzcendentális) fogalmak *által* vezérelt szintézis: minden ítélet maga is fogalmakból áll, fogalmak egymásutánja, szukcessziója, vagyis egyfajta szukcesszív szintézis eredménye.² Ugyan a *Transzcendentális logika* idevonatkozó részeiben a szukcesszív szintézis fogalmának a szintézissel kapcsolatos eleme hangsúlyosabb, ám ha az ítéleteket tartjuk szem előtt, akkor nyilvánvaló: itt is *szukcesszív*, tehát egymásutániságon alapuló szintézisről van szó.

A fogalmi szintézissel kapcsolatos másik fontos gondolatmenet a *Transzcendentális dialektika* című részben az *ész* fogalmaival kapcsolatban bukkan fel. Kant itt már nem az ítéletekben megtestesülő, hanem magasabb szinten fellépő egységformákat, a *következtetésekben* megnyilvánuló szukcesszió különféle változatait tartja szem előtt. Amíg azonban egy ítélet (vagy inkább kijelentés) fogalmak (vagy inkább kifejezések) szukcessziója, addig egy következtetés ítéletek egymásutánja. Ahogyan az értelem fogalmak összekapcsolása révén ítéleteket alkot, úgy az ész ítéletek összekapcsolása révén következtetéseket végez.³ Ebből adódóan mondhatjuk, hogy a gondolkodás mind az értelem által képviselt alapszinten, mind az ész által képviselt magasabb szinten szukcesszív szintézisekkel írható le. Ez tehát az egyik eleme annak a kanti tézisnek, hogy tapasztalat struktúráját lépésekben zajló és fogalmi kapcsolatokat létesítő funkciók határozzák meg.

II. ÉRZÉKISÉG ÉS SZUKCESSZIÓ

A kiinduló állításom másik fele azt fogalmazza meg, hogy az előbbieken tárgyalt szukcesszív szintézis nem csupán a fogalmi gondolkodásra, hanem az egész tapasztalatfolyamra, tehát a(z) érzéki eredetű szemléleteinkre is áll. A szemlélet *a priori* formái, a tér és az idő is különféle elemek szintéziseként foghatóak fel: térbeli pontokat, időbeli pillanatokat fognak egybe. Ráadásul, amint ezt a transzcendentális dedukcióról szóló fejezetek világossá is teszik, az érzékiség formái

² I. m. A 69/B94.

³ Lásd például: Kant 2004. 294. A302/ B359.

által biztosított szintézis maga is szukcesszív jellegű:⁴ bármennyire igaz is, hogy az érzékeink számára adott valóság, vagyis az egész tapasztalt jelenségvilág folytonos, háromdimenziós térben, illetve inkább négydimenziós téridőben jelenik meg számunkra, e megjelenés alapjánál Kant szerint mégis az érzéki sokféleség szukcesszív egymásutániságban történő felfogása áll. Még a tapasztalatfolyamat legmélyebb szinten meghatározó „időt sem képzelhetjük el másként, mint hogy egy egyenes vonal meghúzásakor csakis a sokféleség szintézisére figyelünk, tehát arra a műveletre, mely által az egymásutániság viszonyában meghatározzuk belső érzékünket, s egyúttal figyelmünket e meghatározás egymásutániságára irányítjuk” (Kant 2004. B 154). Kant elképzeléseiben nem csupán a fogalmi gondolkodás, hanem a tapasztalat érzéki rétege is egymásutániságra épül, tehát szukcesszív módon zajló szintézis eredménye.

Sőt, amint *A tiszta ész kritikájának* legspekulatívabb részeiből megtudhatjuk: e két tény, vagyis a fogalmiság és az érzékiség szukcesszív természete összefügg. Az érzékiség legbensőbb, az értelemhez „legközelebb álló” formájának, az időnek előbb említett szintézise nem is más, mint az értelemre, illetve a gondolkodásra jellemző szukcesszív szintézis érzéki megjelenése. Annak eredménye, hogy „az értelem nem találja készen a belső érzékben az érzéki sokféleség összefüggését, hanem létrehozza a szintézist a belső érzék afficiálása útján” (uo.). Az érzékelésre jellemző szukcesszivitás tehát Kant szerint végső soron az emberi gondolkodás szukcesszív jellegéből dedukálható: nem más, mint az értelem érzékiségre gyakorolt hatása („belső affekció”).

Látszólag e meglehetősen spekulatív elképzelés, amely a térben és időben megjelenő sokdimenziós érzéki valóság legalapvetőbb aspektusát valamiképpen visszavezethetőnek véli a gondolkodás szukcesszív, rögzíthető és elkülöníthető fogalmakon és premisszákon keresztül, lépésekben előrehaladó jellegére, teljesen idegen a fenomenológiától és nem véletlenül vált ki azonnali ellenkezést Husserlből.⁵ Meglepő módon azonban nem a kanti dedukció legnyilvánvalóbbnak tűnő problémája az, ami Husserl számára nehézséget jelent. Őt elsősorban az riasztja vissza, hogy Kant elképzelése különféle emberi képességekről, ezek egymásra hatásáról szóló spekulációkat tartalmaz. Az a probléma, hogy miként határozhatná meg az érzékiség, illetve az ennek alapjainál található szemléleti formák *sokdimenziós* és *folytonos* szerkezetét a lineárisan, és a diszkrét elemekből építkező, szukcesszív lépésekben zajló gondolkodás, fel sem merül számára. Sőt van ezen a ponton a kanti transzcendentális filozófiának és a husserli fenomenológiának egy közös vonása, pontosabban fogyatékosága: az időtudat folytonos

⁴ Lásd különösen a B153–B156 részt, valamint Kant dedukcióról adott „rövid foglatatát” (B168–B169).

⁵ Lásd például: Husserl 1998. § 30.

struktúrájának leírásakor valójában mindketten a szukcesszió hagyományos fogalmára támaszkodnak.⁶

A kanti dedukció mögött meghúzódó vízió, és például az időtudattal kapcsolatos fenomenológiai elképzelés problémája tehát egyként abban áll, hogy egyik sem világítja meg, miként hidalható át az a szakadék, amely a lépésekben, szukcesszív és lineáris módon előrehaladó *gondolkodás*, és a nem lineáris, sokdimenziós, ráadásul nem diszjunkt elemekből álló, kontinuus módon megjelenő *érzéki valóság* között húzódik. Ez a nehézség a kanti értelemben vett dedukció legfőbb problémája, és alapvetően két kisebb részproblémára bontható: egyrészt, amíg a dedukció által egymással összekapcsolt két jelenségsorozat egyike diszjunkt elemekből (fogalmakból, ítéletekből) áll, addig a másik (a téridő) folytonos; másrészt, amíg az egyik lineáris, egyetlen dimenzió mentén bontakozik ki, addig a másik több dimenzióban fut szét. A következő részben azt igyekszem megvilágítani, hogy e különbségek miként hidalhatóak át. Ehhez szükséges lesz, hogy a gondolatmenetbe beemeljem Cantornak a progresszió fogalmára,⁷ illetve a különböző gondolkodói korszakaiban megfogalmazott, folytonosságra vonatkozó belátásait is. A következő részekben tehát azt a tézist igyekszem alátámasztani, hogy ha Cantor gondolataira támaszkodva pontosabban megértjük egyrészt a progresszió, másrészt a folytonosság természetét, akkor a gondolkodás és az érzékiség kapcsolatára vonatkozó kanti vízió anélkül is fenntartható, hogy közben el kellene köteleződnünk egy kantiéhoz hasonló spekulatív, „képesség-metafizikával” terhelt, fenomenológiától idegen elképzelés mellett.

III. FOLYTONOSSÁG ÉS SZUKCESSZIÓ

Elsőként a dedukció alapp problémájának a folytonossággal kapcsolatos aspektusát vizsgálom meg. Ez maga is két kisebb kérdéskörre bomlik. Az első arra vonatkozik, hogy egy folytonos kiterjedés állhat-e diszkrét elemekből, a második pedig arra, hogy mi köze lehet a lépésekben előrehaladó szukcesszió fogalmához. Ezután térek csak rá a dedukció alapp problémájának a „dimenziókkal” kapcsolatos nehézségére.

⁶ Ha közelebbről megnézzük, még Husserl időfelfogása is, bár látszólag egy nem lineáris, hanem kétdimenziós modellt használ, valójában a szukcesszióra hagyományos elképzelésére visszavezethető struktúrára épül. Ennek oka, hogy az a modell, amellyel a folytonos idő struktúráját igyekszik megragadni, ugyan többdimenziós, ám csupán egy mindenütt sűrű, és így megszámlálható sokaságot vonultat fel, amely nem alkalmas a folytonosság lényegének megragadásához. Mindez a későbbiekben, főleg az utolsó részben, világosabbá fog válni.

⁷ A szukcesszió és a progresszió fogalmait a későbbiekben megkülönböztetem, ám addig felcserélhetően használom őket.

1. A diszkrét fogalma

Az első megválaszolandó kérdésünk tehát, hogy állhat-e diszkrét elemekből egy olyan folytonos jelenség, mint például a tapasztalat, tehát a belső időfolyam? Folytonos és diszkrét: e két fogalom állandó elemei a filozófusok által használt fogalomtárnak. Mégis – ahogyan Russell megjegyzi –, „amikor azt firtatjuk, hogy e fogalmak pontosan mit is jelentenek, a válasz leggyakrabban csupán folytonos és diszkrét hallgatás” (Russell 1992. 287).

Már Bolzano úgy véli: egy folytonos sokaságot nem az jellemez, hogy nincsenek diszkrét módon elkülöníthető elemei, hanem az, hogy *bármely két eleme között van egy harmadik*.⁸ Ebből azonnal adódik, hogy egy szukcesszió nem lehet folytonos, hiszen egy szukcesszív struktúrában minden elemnek van egyetlen rákövetkezője, vagyis van egy közvetlenül utána következő elem, s e két elem között már nincsenek további elemek. Egy kiterjedést viszont éppen azért tartunk folytonosnak, mert bármely két pontja között vannak további pontjai: nem találhatók benne szakadások vagy „üres helyek”. Bolzano meghatározása éppen a szakadásokat zárja ki, s ezért képes valamit megragadni a folytonosság természetéből. Annak ellenére tehát, hogy az általa jellemzett sokaságoknak is vannak diszkrét, egymástól megkülönböztethető elemei, bizonyos értelemben mégis folytonosak. Az ilyen módon elrendezett halmazokat mindenütt sűrűnek szokás nevezni.⁹ A továbbiakban a folytonosságról így adódó felfogást bolzanói típusúnak hívom. Ugyan azonnal látni fogjuk, hogy a folytonosságnak nem ez a legelterjedtebb meghatározása, és Cantor maga sem elégszik meg ezzel, ám, ahogyan említettem, már e felfogás is megragadja a folytonosság egy fontos jellemzőjét.¹⁰

Bolzano ráadásul a folytonos sokaságok későbbi, cantori felfogásának talán legfontosabb jellegzetességét is megfogalmazza: a folytonos sokaságok specifikuma *nem az*, hogy *bizonyos számú* vagy *számosságú* elemük van, hanem az, hogy az elemeik *bizonyos módon vannak elrendezve*.¹¹ Ezt úgy fejezhetjük ki, hogy a folytonosság rendezésen alapuló, *ordinális* – nem pedig *kardinális* – fogalom.

Bolzano azonban még nem rendelkezett azokkal a fogalmakkal, amelyekre támaszkodva e meglátását pontos formára tudta volna hozni, így a *Végtelen pa-*

⁸ Lásd például: Bolzano 1851. 72.

⁹ A „mindenütt sűrű” (*überalldicht*) kifejezés használatával kapcsolatos elsőbbség kérdésében Cantor vitába keveredik Du Bois-Reymond-al (a vitáról lásd Dauben 1979. 93). Cantor a fogalmat 1895-ben definiálja és használja (Cantor 1895. 304), de egy némileg eltérő, ám ezzel szorosan összefüggő fogalmat már 1879-ben is bevezet. Lásd Cantor 1879. 140.

¹⁰ Ehhez azt is hozzátehetjük, hogy még a később ismertetésre kerülő fejlemények tükrében sem teljesen lehetetlen vagy ésszerűtlen e meghatározást tartani a folytonosság helyes definíciójának. Így jár el még Peirce is (lásd például: Peirce 1960). Egy ilyen felfogáshoz, azt hiszem, csupán azt kell elutasítani, hogy a folytonosság fogalmának lenne bármiféle szemléletes, például geometriai alapja. Russell például – azzal együtt, hogy nem a folytonosság bolzanói fogalmát használja – a fogalommal kapcsolatban elutasítja a geometriai szemléletre való hivatkozást.

¹¹ Lásd Bolzano 1851. 72–73.

radoxonai című munka idevágó megjegyzései inkább csak olyan zseniális sejtéseknek nevezhetők, amelyekre Cantor gondolatai nélkül talán még csak fel sem figyelnénk. Bolzano esetében az az alapvetően helyes meggyőződés, hogy a folytonosság egy bizonyos elrendezés-típus, csak abból a Cantor által megcáfolt gondolatból származhatott, hogy csupán egyetlen végtelen szám(osság) létezik. Ha így gondolnánk, és e mellett még, Bolzanóhoz hasonlóan, azt is elfogadnánk, hogy egy folytonos sokaság is diszkrét elemekből áll, akkor – mivel egy végtelen szukcessziónak és egy folytonos sokaságnak ekkor ugyanannyi („végtelen sok”) eleme lenne¹² – a folytonos sokaságok és a szukcessziók megkülönböztetéséhez nem maradna más eszközünk, mint hogy feltételezzük: e kétféle végtelen sokaság elemei különböző módon vannak elrendezve. E helyes meglátás valódi okait azonban csak Cantor tudta feltárni. Már gyakorlatilag az ókori görög gondolkodók belátták, hogy a Bolzano által megfogalmazott sajátosság ugyan szükséges, ám nem elégséges feltétele a folytonosságnak. Cantor volt azonban az első, aki precízen meg is tudta határozni azt az elrendezés-típust, amely a folytonos sokaságokat megfelelően jellemzi,¹³ és ez nem egyezett azzal, amelynek megfelelően a bolzanói, mindenütt sűrű halmazok elemei vannak elrendezve.

A „mindenütt sűrű” módon elrendezett sokaságok ugyan diszkrét elemekből állnak, ám a „dedukció lehetőségének” szempontjából nem is csupán az velük a probléma, hogy nem minden ilyen módon elrendezett sokaság folytonos. Még alapvetőbb nehézség, hogy egy ilyen sokaság elemei nyilvánvalóan nem alkotnak szukcessziót: nem „lépésekben” követik egymást, hiszen egy mindenütt sűrű sokaság egyik elemének sincs rákövetkezője. A következő alrészben e két problémát tárgyalom.

2. Szukcesszió, progresszió és folytonosság

Részletesebben kifejtve: egy mindenütt sűrű módon elrendezett sokaság azért nem lehet szukcesszív, mert bármelyik y elemét próbálnánk meg egy x elem közvetlen rákövetkezőjének tekinteni, a definíció szerint mindig lennének újabb elemek x és y között. Ilyen mindenütt sűrű módon vannak elrendezve például a racionális számok a szokásos, nagyság szerinti elrendezésük szerint.¹⁴ Bármilyen kevéssel is nagyobb egy racionális szám egy másiknál, (például az 501/100 az 5-nél) mindig lesz olyan racionális szám, amelyik a kettő közé esik. Ez abból adódik, hogy nincsenek „közvetlenül egymást követő” racionális számok, nincs

¹² A fogalom definíciójából egyszerűen látható, hogy bármely mindenütt sűrű módon elrendezett sokaságnak végtelen sok eleme van.

¹³ Cantor az utolsó nagy művében jut el ehhez az általa θ -val jelölt rendtípusnak a meghatározásáig; Cantor 1895. §11.

¹⁴ Racionális számoknak azokat nevezzük, amelyek előállhatnak két egész szám hányadosaként.

olyan „legkisebb” természetes tört, ami az „egymást követő” racionális számok különbsége lehetne. (Ehhez elég például $1/10$, $1/100$, $1/1000$, ... végtelen sort figyelembe vennünk.)

Már Cantor belátja azonban, hogy a racionális számok *átrendezhetőek* úgy, hogy egy végtelen szukcessziót alkossanak. E szukcesszív sorban e számok természetesen már nem a megszokott, nagyság szerinti sorrendben szerepelnek. Az átrendezésnek e lehetősége azt mutatja: nem áll, hogy egy mindenütt sűrű sokaság elemeit ne lehetne szukcesszív módon felfogni; vagyis egy mindenütt sűrű struktúra nem minden értelemben „visszavezethetetlen” a szukcesszivitás fogalmára.

Cantor azonban azt is be tudta látni, hogy – szemben a racionális számok halmazával – a valós számok szokásos módon elrendezett halmaza már nem rendezhető el egy hagyományos értelemben vett szukcesszió szerint. A dedukció alapproblémája szempontjából ez azért jelent nehézséget, mert a legáltalánosabb felfogás szerint a folytonos sokaságokat, nem racionális, hanem valós számokkal jellemezhetjük. E miatt úgy tűnik, végső soron mégis azt kell mondanunk, hogy egy folytonos sokaság – annak ellenére, hogy maga is diszkrét elemekből áll – sehogyan sem fogható fel egy szukcesszió alapján.

Cantor számunkra releváns megfigyelései azonban az előbbiekkal még nem értek véget, ugyanis azt is megmutatja, hogy a rendezés egy speciális változatára – az úgynevezett jól-rendezés fogalmára – alapozva a szukcesszivitás fogalma maga is kitágítható.¹⁵ Az új fogalom révén adódó, végtelen elemből álló jól-rendezett struktúrákra igaz például az a hagyományos szukcessziókat is jellemző két sajátosság, hogy van egy kezdőelemük, és hogy minden elemüknek van egyetlen közvetlen rákövetkezője. Az így nyert fogalom azonban többféle struktúrára igaz, mint a szukcesszió hagyományos fogalma: a szó Kant által is használt, hagyományos értelemben nem minden jól-rendezett sokaság szukcesszív. Az előbb említett tulajdonságaik miatt ezután a jól-rendezett sokaságokat, tehát a „cantori értelemben vett szukcessziókat” progresszióknak fogom nevezni.

Ugyan, ahogyan már említettem is, egy folytonos sokaság, például a valós számok halmaza, és ezzel együtt egy tetszőlegesen hosszú folytonos egyenes pontjai vagy egy tetszőlegesen hosszú időszakasz pillanatai nem rendezhetőek át egy hagyományos értelemben vett szukcesszióba, de már Cantor úgy gondolja, hogy *bármely sokaság* – tehát az előbb említettek is – jól-rendezhetőek, tehát átrendezhetőek egy *progresszióba*. Ezt az úgynevezett „jól-rendezési” tételt ugyan Cantor

¹⁵ E gondolatmenet részleteit, a jól-rendezés, tehát „a szukcesszió cantori fogalmát” itt nem lesz módomban ismertetni, de ezen a szinten ez nem is szükséges. Az új elképzelést és a belőle adódó egyéb, meglehetősen messzire nyúló és jelentős filozófiai következményeket kicsit részletesebben ismertetem két másik írásomban (Komorjai 2023; 2024a). Az elképzelés bővebb matematikai hátterét és minden lényeges következményét azonban csak a *Keletkezés és végtelen* című könyvemben fejtem ki (Komorjai 2024b).

maga nem tudta bizonyítani, ám később, 1904-ben Ernst Zermelo a kiválasztási axióma feltételezésével már képes volt belátni.¹⁶

Ha tehát nem a szukcesszió hagyományos, Kant és Husserl által implicit módon feltételezett fogalmát vesszük alapul, hanem a Cantor által bevezetett, némileg tágabb értelmű progresszió-fogalmat, akkor érthetővé válik a kanti dedukció egyik tisztázatlan előfeltevése: az, hogy milyen értelemben húzódhat meg a szukcesszivitás jelensége egy olyan folytonos mennyiség felfogásának hátterében is, mint például az idő.

Kant azonban úgy gondolja, hogy a szukcesszivitás nem csupán a vonalként ábrázolható, egydimenziós időt, hanem a többdimenziós térbeli szemléletünket is meghatározza. Utolsó lépésben azt kell még megértenünk, miként állhat az egydimenziós folytonos kiterjedés – és azon keresztül a progresszivitás – a többdimenziós tér jelensége mögött.

IV. A DIMENZIÓK REDUKÁLHATÓSÁGA

E kérdésre tulajdonképpen már választ is adtam, hiszen ha elfogadjuk, hogy *tetszőleges* diszkrét elemekből álló sokaság, illetve halmaz jól-rendezhető, akkor ez óhatatlanul igaz a pontsokaságként felfogott többdimenziós térre is. Cantor gondolkodása azonban bizonyos értelemben fordított utat jár be, amit érdemes röviden rekonstruálni. Egyik első, számosságokra vonatkozó eredménye éppen a tér „invariáns sajátosságaként” felfogott dimenziófogalomra vonatkozó kritikája, vagyis – egy a céljaim szempontjából alkalmasabb megfogalmazást választva – a „dimenziók redukálhatóságának” tézise volt. Kissé leegyszerűsítve, elsőként azt mutatta meg, miként állhat egy többdimenziós folytonos sokaság (például a végtelen tér) mögött egy egydimenziós (lineáris) folytonos kiterjedés (a végtelen egyenes).¹⁷ Az utóbbival kapcsolatban azonban csak jóval később, a jól-rendezés fogalmának bevezetése után fogalmazta meg azt a sejtését, hogy bizonyos értelemben a progresszió jelenségén alapul.

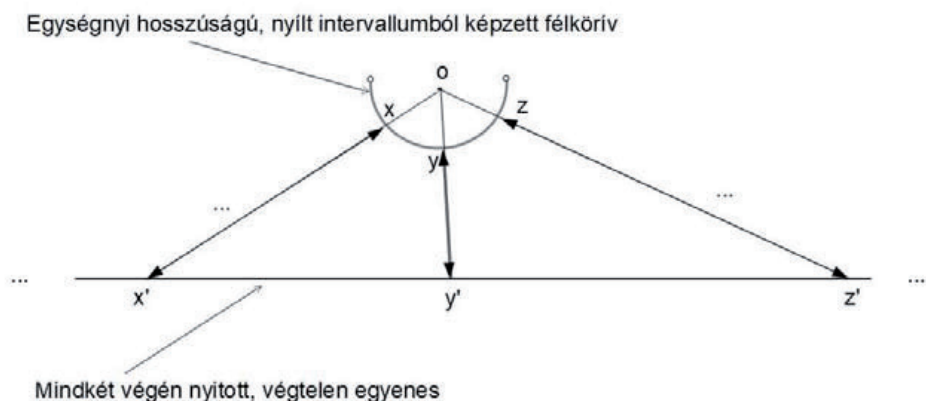
E „kétlépéses redukció” még hiányzó első lépéséhez mindenekelőtt azt kell pontosabban megértenünk, mit is jelent az itt és a korábbi megfogalmazásaimban is már alkalmazott „redukció”; miként „alapul” egy sokaság (felfogása) egy másikon; milyen értelemben „állhat” az egyik a másik „mögött”. A korábbi gondolatmenetekben e kifejezések alatt azt értettem, hogy egy sokaság *átrendezhető* egy másik struktúrájának megfelelően. A racionális számok esetében például láttuk, hogy e mindenütt sűrű sokaság, átrendezhető úgy, hogy az elemei szuk-

¹⁶ Lásd Zermelo 1904/1967; valamint Zermelo 1908/1967.

¹⁷ Lásd Cantor 1878. Cantor már 1874-ben egy Dedkindnek írt levelében megfogalmazza a probléma egy változatát, s a végső megoldáshoz is csak Dedekinddel való levelzés során jut el. A probléma és a levelezés történetéhez lásd Dauben 1979. 54–66.

cessziót, vagyis egy olyan struktúrát alkossanak, amelynek legfőbb példája a természetes számok sorozata. (1, 2, 3, 4, 5, ...)

Egy sokaság átrendezését megkaphatjuk, ha egy úgynevezett kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk az elemei és egy másik struktúra elemei között. Két sokaság pedig – jelöljük őket például L -éel és M -mel – pontosan akkor feleltethető meg kölcsönösen egyértelműen egymásnak, ha L és M elemeiből tudunk úgy párokat képezni, hogy L sokaság minden elemét pontosan egy-egy párosítjuk össze M elemei közül, L különböző elemeihez különböző M -beli elemeket párosítunk, és a párosítás során M minden elemét felhasználjuk. Az efféle megfeleltetések nem csupán arra alkalmasak, hogy belássuk: egy bizonyos struktúrába rendezett sokaság átrendezhető egy másikba, hanem azt a tényt is megmutatják, hogy két sokaságnak ugyanannyi eleme van. E fogalomra támaszkodva, Cantort követve például könnyű bebizonyítani, hogy egy tetszőlegesen rövid nyílt intervallum (illetve szakasz) pontjainak számossága megegyezik egy végtelen hosszú egyenesen elhelyezkedő pontok számosságával. Ezt például, egy egységnyi hosszúságú intervallum esetében az alábbi ábrát felhasználva a következőképpen látható be: ha a félkörre „hajlított” intervallum minden pontját a végtelen egyenesnek azzal a pontjával párosítjuk össze, amelyben az intervallum szóban forgó pontját a félkör o középpontjával összekötő egyenes a végtelen egyenest el metszi (x -et például x' -vel), akkor látható, hogy a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az intervallum minden pontjának megfelel pontosan egy pont az egyenesen, különböző pontoknak különböző pont felel meg, és az egyenes minden pontját hozzárendeltük az intervallum egy pontjához.



E gondolatmenet jól szemlélteti azt a meglepő tényt, hogy egy tetszőlegesen rövid szakasznak nincs kevesebb pontja, mint egy végtelen hosszú egyenesnek. Egy folytonos szakaszt – éppen azért, mert a pontjai „mindenütt sűrűn” helyezkednek el – a végtelenségig „ki lehet nyújtani” anélkül, hogy újabb pontokat kellene „hozzávennünk”.

Cantornak a dimenziók redukálhatóságára vonatkozó tétele azt mutatja meg, hogy ez nem csak egy dimenzió mentén tehető meg: a végtelen kétdimenziós síknak, sőt a háromdimenziós térnek sincs több pontja, mint a végtelen egyenesnek. Ha pedig ezt a tényt összekapcsoljuk az előző belátással, akkor ahhoz a talán még meglepőbb tényhez jutunk, hogy a végtelen háromdimenziós térnek nincs több pontja, mint egy tetszőlegesen rövid szakasznak. A világegyetem három (vagy akár több) dimenziós terének pontjai – ahhoz hasonlóan, ahogyan a fenti ábra tanúsága szerint a végtelen egyenes pontjai is – kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egy tetszőlegesen rövid egyenes szakasz pontjainak.¹⁸

És ha ezek után mindezt összekapcsoljuk az előző részben ismertetett jól-rendezési tétellel is, akkor a dedukció kanti problémája mögött implicit módon meghúzódó tézist is megérthetjük: A cantori vízióra támaszkodva közelebb kerülhetünk annak belátásához, hogy tetszőlegesen sok dimenziójú folytonos tér, például a négydimenziós téridő felfogása „mögött” miként húzódhat meg valamilyen formában egy diszkrét elemekből álló progresszió. Ekkor tehát egy új formában rehabilitálhatjuk a szukcesszív szintézisekre vonatkozó kanti tézist: csupán a szukcesszió eredeti, kanti változata helyett a progresszió új, cantori fogalmát kell benne felhasználnunk.¹⁹

IRODALOM

Bolzano, Bernard 1851. *Paradoxien des Unendlichen*. Leipzig, C.H. Reclam sen.

Cantor, Georg 1878. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. In Cantor 1932. 119–133. <https://doi.org/10.1515/crelle-1878-18788413>

Cantor, Georg 1879. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten Nr.1. In Cantor 1932. 139–146. <https://doi.org/10.1007/BF01444101>

¹⁸ Ugyan a témánk szempontjából ez nem lényeges, de a két eset valójában nem teljesen párhuzamos. A végtelen egyenest ugyanis nem lehet két vagy több dimenzióba úgy „kinyújtani”, mint ahogyan a szakaszt ki lehet nyújtani egyenessé. (Például az egyenes és a sík között megadható kölcsönösen egyértelmű leképezések, amit arra már Dedekind is felhívta Cantor figyelmét, nem lesznek folytonosak. A Cantor által megadott leképezés nem tartja meg az elemek rendezését. Amíg a szakasz esetében, ha egy pont megelőzött egy másikat, akkor a nekik az egyenesen megfeleltetett pontok is ugyanilyen sorrendben követték egymást, addig az egyenes és a többdimenziós terek között megadható kölcsönösen egyértelmű leképezésekre ez nem áll.)

¹⁹ A korábban már hivatkozott írásaimban igyekszem megmutatni, hogy e látszólag csupán technikai jellegű és jelentéktelennek tűnő változás milyen nagy horderejű átalakulásokat implicál például az újkori tudatfelfogást vagy a fenomen fogalmát illetően. Sőt, azt hiszem, ha elfogadjuk, hogy a cantori értelemben vett progresszió nem csupán a megjelenő valóság bizonyos elemeinek, például a világ-fenoménnek, hanem magának a fenomennek felfogásában szerephez jutó tudatműködésnek (például az újdonság tapasztalatának) a szempontjából is alapvető jelentőségű, akkor ezek a gondolatok arra is rámutatnak, hogy a tudat működése miért nem lehet tisztán algoritmikus: könnyen látható ugyanis, hogy bármiféle algoritmikus működés a hagyományos értelemben véve szukcesszív folyamat.

- Cantor, Georg 1895. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre §§1–11. In Cantor 1932. 282–311.
- Cantor, Georg 1932. *Gesammelte Abhandlungen*. Hrsg. von Ernst Zermelo, Berlin, Springer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00274-2>
- Dauben, Joseph Warren 1979. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of Infinite*. Princeton, New York, Princeton University Press.
- Husserl, Edmund 1998. *Az európai tudományok válsága I*. Ford. Berényi Gábor, Mezei Balázs. Budapest, Atlantisz.
- Kant, Immanuel 2004. *A tiszta ész kritikája*. Ford. Kis János. Budapest, Atlantisz.
- Komorjai László 2023. A tudatban rejlő végtelen. *Magyar Filozófiai Szemle*. 67/4. 135–154.
- Komorjai, László 2024a. Infinity in Phenomenology. *Phänomenologische Forschungen*. Megjelenés alatt. https://doi.org/10.28937/9783787347278_7
- Komorjai L. 2024b. *Keletkezés és végtelen*. Budapest, L'Harmattan.
- Peirce, Charles Sanders 1960. On the Logic of Number. In Charles Hartshorne – Paul Weiss (szerk.) *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Cambridge/MA, Harvard University Press. 158–170.
- Zermelo, Ernst 1904/1967. Proof that every set can be well-ordered. In Jean van Heijenoort (szerk.) *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931*. Cambridge/MA–London, Harvard University Press. 139–141.
- Zermelo, Ernst 1908/1967. A new proof of the possibility of a well-ordering. In Jean van Heijenoort (szerk.) *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931*. Cambridge/MA–London, Harvard University Press. 183–198.