

Miért a priori az eukleidészi geometria a kanti értelemben?*

DOI: <https://doi.org/10.70510/mfsz.19744>

Nemcsak eszünkkel ismerjük meg az igazságot, hanem szívünkkel is. Ezen utóbbi segítségével ismerjük föl az alapelveket.

(Pascal, 282. töredék.)

A tisztán szemléleti nem közölhető.

(Frege 1884. 26. §: 35; Frege 1999. 52.)

I. BEVEZETÉS

Szerte a világon folklórszerűen – „szájról szája” – terjednek olyan filozófiai tévképzetek, melyek figyelmen kívül hagyják a tárgykör szakirodalmát, s amelyeknek a filozófusok egy része is áldozatává válik. Elterjedt vélekedés például, hogy a matematikai végtelen cantori elmélete – vagy legalábbis annak korrigált, axiomatizált változata – megcáfolta volna a végtelen fogalmának nevezetes kanti antinómiáját. Kétségtelen, hogy a cantori rendszer mint formális rendszer ellentmondásmentes, és a matematikán belül kifejezetten gyümölcsöző. Csak-hogy nem kell föltétlenül Cantor elméletének Wittgenstein általi radikális kritikájához fordulnunk, hogy belássuk: mihelyt az *aktuális* végtelennel kapcsolatos fogalmakat kapcsolunk szimbólumaihoz, a kanti antinómiához hasonló problémákba ütközünk. Hasonlóan hamis az az elterjedt vélekedés, mely szerint a kvantummechanikai indeterminizmus megoldotta volna a szabad akarat problémáját. Már a tárgykör filozófiai irodalmának futó áttekintéséből is kiderül, hogy az objektív fizikai véletlen semmivel sem hozza közelebb e „megoldás”-t, hiszen ugyanúgy kiszolgáltatja az akaratot a fizikai véletlennek, mint a determinista világkép a fizikai szükségszerűségnek. S akkor még nem is beszéltünk arról, hogy a kvantummechanikai indeterminizmus csupán egy lehetséges interpretáció a determinista interpretációk mellett.

* A tanulmány az NKFIH/OTKA K 135638 számú kutatási projektjének keretében készült.

A jelen írás azzal az állítással foglalkozik, mely szerint a nem eukleidészi geometriák fölfedezése megcáfolta volna az eukleidészi geometria *a priori* voltára vonatkozó kanti tanítást. Ez a probléma nem egyszerűen *A tiszta ész kritikájának* csupán a matematikusok számára izgalmas oldalhajtása, hanem fontos pillére Kant e művének, melynek esetleges hamis volta – ha nem is döntené romba, de – megrendítené a mű alapjait.

Fontos ugyanakkor hangsúlyoznunk, hogy egyrészt a tér *a priori* voltára, másrészt az eukleidészi geometria *a priori* voltára vonatkozó állítás két független állítás, mely nem feltételezi egymást még akkor sem, ha Kant személyesen e kettőt összekapcsolja. Jelen tanulmány a két állítás közül kifejezetten az eukleidészi geometria *a priori* voltára irányuló kérdéssel foglalkozik, és azt szándékozik bemutatni, hogy ha az erre adott igenlő válasz logikailag nem is bizonyítható, erős érvek hozhatók föl mellette. Ennek belátása érdekében elsőként reprodukáljuk a kanti állítást, majd kilépünk a kantiánus keretből és általánosabban, de a kanti tézist alesetként magában foglalva fogalmazzuk újra a kérdést. Végül amellet hozzáunk föl érveket, hogy az eukleidészi geometria *a priori* volta ebben az általánosabb kontextusban is fönnáll.

Közismert, hogy az eukleidészi geometria *a priori* voltával szemben empirikus, logikai, konvencionalista és transzcendentális érvek fogalmazódtak meg, (vö. pl. Székely. 2016). Ezek közül az első három forrása a vonatkozó kanti tézis pontos ismeretének hiánya vagy annak egy már eleve anti-kantiánus filozófiai beállítódásban való olvasata (vö. pl. Kim 2006; Kjosavik 2009; Kvasz 2011; illetve Székely 2016). A kanti filozófia ilyen utóbbi, anti-kantiánus – vagy legalábbis „kívről” történő – megközelítésének jellegzetes példája a kanti szintetikus *a priori* ítéletet analitikussá alakíthatóságára irányuló kérdés (vö. pl. Beck 1956), hiszen ez a kanti kontextusban fogalmából következőleg kizárt (vö. pl. Rovira 2020). A „transzcendentális” ellenérvcsoport, mely megismerőképességünkre, illetve szemléletünkre vonatkozik, viszont tárgyyszerű, a kanti problémát relevánsan érinti, és a jelen tanulmány ezekkel szembesül.

Tanulmányunkban Kantot tudatosan az Alexander-Bánóczyi-féle fordításban idézzük.

II. A KANTI ÁLLÍTÁS TÁRGYSZERŰ TARTALMA

A tévképzetek elkerülése érdekében mindenekelőtt azt kell tisztáznunk, hogy mit is értett a német filozófus az eukleidészi geometria *a priori* voltán. E tekintetben szerencsések vagyunk, mivel Kant ezt nagyon határozottan és kifejezően fogalmazta meg. Egyrészt:

Minthogy ugyanis azt látták, hogy a matematikusok következtetései mind az ellentmondás tétele fonalán haladnak [...] elhitették magukkal, hogy az alaptételeket is az

ellenmondás tételéből lehet megismerni, amiben nagyot csalódtak; mert a szintetikus tétel megismerhető ugyan az ellenmondás tétele alapján, de csak ha más szintetikus tétel előzi meg, amelyből következtethető, nem pedig magában (Bevezetés V/1. – B14; Kant 1913. 35).

Másrészt:

A geometria oly tudomány, amely a tér tulajdonosságait szintetikusán s mégis apriori határozza meg (I. § – B42; id. mű 51).

Az első idézet világossá teszi, hogy bár Kant szerint a matematikában – s így a geometriában – a formális logikát követik a levezetések (azaz a „bizonyítások”), azok mégis szintetikusak. Ugyanis – állítja Kant – egy szintetikus tétel csak akkor ismerhető meg analitikus módon, ha másik szintetikus tételből vezetjük azt le. Az ily módon levezethetetlen tételek az alaptételek – azaz esetünkben a geometriai axiómák. Kant itt egy olyan belátást fogalmaz meg, mely – a tér *a priori* voltának föltételezése nélkül – már Pascalnál megjelent (vö. *Gondolatok*, 282. töredék; Pascal 1983. 139), de teljes mélységében csak a 20. században került kidolgozásra: a matematikai igazságok analitikusan tekintve csupán föltételesek, mivel kiinduló axiómái (azaz „alaptételei” vagy „alapelvei”) logikai úton bizonyíthatatlanok. Mivel ez igaz az eukleidészi geometria axiómáira is, ezzel *a német filozófus itt kimondatlanul a nem eukleidészi geometriák logikai lehetőségére mutat rá.*

A másodikként idézett állítás a geometria tárgyát és jellegét határozza meg. Eszerint a geometria módszere szintetikus, ám mégis *a priori*. Bár az első idézetből az következik, hogy az axiómáktól – az „alaptételek”-től – eltekintve a többi geometriai tétel már analitikusan levezethető, ám ez nem jelenti azt, hogy azok tisztán analitikusak volnának: mivel szintetikus *a priori* tételek levezetettjei, a szintetikus jelleget átöröklük az axiómákból.

Az előbbiekből következik, hogy a geometria egyidejű *a priori* és szintetikus voltára vonatkozó kanti állítás igazságértékének vizsgálatakor elég csupán a geometriai axiómákkal foglalkoznunk. Tekintettel arra, hogy az axiómák mint szintetikus állítások logikailag nem bizonyíthatóak, három lehetőségünk marad: vagy empirikusan (*a posteriori*), vagy *a priori* ismerjük meg őket, vagy ugyan *a priori*, de önkényes megegyezés alapján posztuláljuk azokat. Több mint száz évvel később Poincaré kivédhetetlen érveket fogalmazott meg az első lehetőséggel szemben. Ám ő ezután a harmadik lehetőséget választotta: szerinte a térnek csak megegyezés révén tulajdoníthatunk geometriát, és ennek során annak hasznosságától mint irányadó mércétől eltekintve szabadok vagyunk (amiből az is következik, hogy a geometriai axiómák önmagukban – éppen konvecionális voltak miatt – nem hordoznak ismeretet, vö. Poincaré 1908).

Mi az, amit Kant e tekintetben lát, Poincaré viszont figyelmen kívül hagy? Másképpen fogalmazva: miért nem vagyunk szabadok Kant szerint a geometriai

axiómák megválasztásakor, ha azt sem empirikus (*a posteriori*), sem logikai megfontolások nem korlátozzák? Ezzel a kérdéssel eljutottunk *A tiszta ész kritikája* egyik sarokkövéhez.

III. A TÉR MINT AZ ÉRZÉKI SZEMLÉLET TISZTA FORMÁJA

Elemi filozófiai ismeret, hogy Kant szerint az érzéki szemléletnek két tiszta formája van: a tér és az idő, melyek közül az előbbi

mint a külső érzékek minden jelenségének formája (A 26 – id. mű: 52) szükségszerű a priori képzet, mely minden külső szemléletnek alapul szolgál (A24 – uo. 50).

és mint ilyen

nem diszkurzív vagy [...] általános fogalom tárgyak viszonyáról általában, hanem tiszta szemlélet (A24–A25 – uo. 50).

Talán egy analitikus filozófusban kétségeket ébreszthet – vagy ellentmondásos lehet számára – e kanti meghatározás annyiban, hogy itt a tér egyszer mint az érzéki szemlélet tiszta formája jelenik meg, máskor pedig maga is mint „tiszta szemlélet” kerül meghatározásra. Ám a kanti szöveg ilyen szőrszálhasogató megközelítése csak arra jó, hogy megakadályozza a kanti gondolatok megértését: valójában semmi ellentmondás nincs abban, hogy a tér a szemlélet tiszta formája, és egyúttal maga is tiszta szemlélet legyen – mint amiképpen ezt Kant kifejezetten állítja is *A tiszta ész kritikája* második kiadásában: „De a teret meg az időt nemcsak mint az érzéki szemlélet formáit, hanem mint szemléletet is gondoljuk” (26. § – B160, uo. 118–119).

Az előbbiek alapján világosan kirajzolódik előttünk a geometriával kapcsolatos kanti álláspont. A geometria feladata a tér, mint *a priori* tiszta szemlélet tulajdonságainak meghatározása. Tárgya egy a priori, s ezért nincs szükség a külső, tapasztalati világ felé fordulnunk axiómáinak lerögzítéséhez, s mivel az utóbbiak analitikusan nem állapíthatók meg, csak szintetikusak lehetnek. A geometria tehát nem önkényes: akkor is lehet hamis, ha egyébként logikailag (matematikailag) ellentmondásmentes. Igazságának kritériuma, hogy helyesen ragadja-e meg külső érzéki szemléletünk tiszta formáját, ami végső soron az axiómákon múlik.

Nem az empirikusan megjelenő világról van itt szó tehát, hanem külső szemléletünk tiszta formájáról. A kérdés nem az, hogy lehetségesek-e logikailag ellentmondásmentes más geometriák, hanem hogy miután ilyenek Bolyai, Lobacsevsz-kij és Riemann által megkonstruálásra kerültek, ezek közül melyik vagy melyek felelnek meg tiszta szemléletüknek. Forde Kjosavik megfogalmazásában

Csak akkor lehet a geometria a tér elmélete, szemben a csupán nominálisan „terek”-ként meghatározott általános struktúrákkal, ha a geometriai axiomatikus rendszerek szemantikája – vagy modellálása – kapcsolatban áll a kanti szemlélettel (Kjosavik 2009. 26).

A kérdés helyes fókuszálása Kjosavik terminológiájával tehát a következőképpen hangzik: létezik-e valamiféle kritérium és mód, amely révén a geometriai elméletek között különbséget tehetünk a csupán nominálisan terekként meghatározott általános struktúrák, és a geometria mint a tér valódi elmélete között, s ha igen, akkor vajon ez utóbbi kategóriába mely geometriák tartoznak? (Kjosavik ez utóbbi tekintetben bizonytalan, s a probléma helyes fókuszálása ellenére ezért ő csak részlegesen tekinthető Kant követőjének.)

Persze egy adott probléma helyes fókuszálása nem vonja maga után automatikusan megoldását. Így esetünkben két újabb kérdés vetődik föl:

- (1) Létezik-e egyáltalában olyan mint a kanti értelemben vett tér, azaz létezik-e olyan, mint külső szemléletünk tiszta formája?
- (2) Ha létezik ilyen, miképpen állapítható meg, hogy a geometria axiómái megfelelnek-e ennek a kanti értelemben vett térnek, amely azon túl, hogy a külső szemlélet *a priori* tiszta formája, maga is tiszta szemlélet?

E kérdések azt is világossá teszik, hogy nem valamiféle szellemi korlát vagy filozófiai műveletlenség vezet a geometria *a priori* voltára vonatkozó kanti tézis félreértéséhez. Ennek oka inkább az eredeti kanti kontextus figyelmen kívül hagyása, mely a problémának „kívülről” történő, más filozófiai elkötelezettségen nyugvó megközelítéséből – azaz a kanti értelemben vett érzéki szemléletre és annak két tiszta formájára vonatkozó tanítás (rejtett vagy kifejezett) elutasításából – fakad.

IV. A PROBLÉMAKÖR KITERJESZTÉSE A KANTI FOGALOMRENDSZEREN TÚLRA

A következőkben kilépünk a kanti keretekből, és általánosabban – a tér *a priori* vagy nem *a priori* voltára vonatkozó kérdést zárójelbe téve, attól függetlenül – fogalmazzuk meg az eukleidészi geometria *a priori* voltára vonatkozó állítást, és ennek érdekében a kanti *a priori* térnél egy gyengébb és ezért általánosabb fogalmat vezetünk be, melyet „térszemlélet”-nek fogunk nevezni. Kant ugyan általában a geometria *a priori* voltáról beszél, nyilvánvaló, hogy e tekintetben az eukleidészi geometriára gondol. Ez nem csupán történetileg következtethető ki, hanem pl. az egyenes fogalmára adott – később ismertetésre kerülő – meghatározásából is kiderül. Maga a kérdés azonban Bolyai és Lobacsevszkij fölfedezése után (amely tulajdonképpen mai szemmel nem fölfedezés, hanem a

párhuzamossági axióma függetlenségének bizonyítása) már oly módon vetődik föl, hogy létezik-e olyan *a priori* és nem konvencionális tényező, mely kitünteti valamelyik geometriát vagy geometriák egy csoportját.

Mármost nyilvánvalóan rendelkezünk azzal az adottsággal, hogy az érzékeink által megjelenített empirikus világot térbeliként szemléljük. Ez a képesség pedig valamiképpen – ha másként nem, opcióként, lehetőségként, mely a személy egészséges fejlődése során bontakozik ki – csak tapasztalat előtti lehet, mert e nélkül eleve nem tapasztalhatnánk a térbeliséget, s egy nem térbeliként megjelenő világ *a posteriori* nem alakíthatná ki bennünk a fogékonyságot a térbeliség iránt. E tapasztalatelőttiség még akkor is fennáll, ha egy keményen realista térfölfogást követve térélményünket és a vele kapcsolatos képzeiteinket a tőlünk független világ „objektív” térbelisége lenyomatának tekintjük. Hiszen, ha nem volna meg e képességünk már a tapasztalás előtt arra, hogy e lenyomatot befogadjuk, nem észlelhetnénk a térbeliséget. A helyzet e tekintetben hasonló a színérzékelés képességéhez: ha nem rendelkeznek valamely genetikusan adott módon e képességgel, akkor színeket sem érzékelhetnénk. Természetesen a térérzékelés és a színérzékelés képességéből egyáltalában nem következik sem a tér, sem a színek *a priori* volta, továbbá a térbeliség érzékelésének tapasztalatelőtti képessége a tér mint tiszta szemlélet fogalmával sem azonos: arra szolgál csupán, hogy a kanti kontextusnál általánosabban, a kanti érvektől függetlenül is belássuk az eukleidészi geometria *a priori* voltát. (Ami – mint már hangsúlyoztuk – természetesen nem feltétlenül vonja maga után a tér *a priori* voltát.)

Mármost az nyilvánvaló, hogy Kantnál ez a képességünk az *a priori* tér révén adódik, mely a külső érzéki szemlélet tiszta formája, és – mint láttuk – egyúttal maga is tiszta szemlélet (Kant 26.§ – B 160). Ugyanakkor nem kell föltétlenül az *a priori* tér kanti fogalmát elfogadunk ahhoz, hogy az eukleidészi geometria *a priori* voltáról beszélhessünk. Elég csupán ezen – az előbbiek értelmében szűkségszerűen *a priori* – adottságot elismerni, és ennek természetét vizsgálni. S ha ennek során belátjuk, hogy ez az adottság az eukleidészi geometriát tünteti ki, illetve az csupán az eukleidészi geometriával van összhangban, a kanti gondolatmenetnél általánosabban, de ugyanakkor Kantra is érvényesen, őt is igazolva beláttuk az eukleidészi geometria *a priori* jellegét.

Az előbbi képesség nyilván nem egyszerűen szemünk által adott, Hiszen a vakok is rendelkeznek térélménnyel tapintás és mozgás révén, amiként ezt Palágyi Menyhért több mint száz évvel ezelőtt szuggesztív módon elemezte (Palágyi 1918/1925; 1925), és amiképpen ezt a mai tudományos vizsgálatok sokoldalúan igazolták. Ám ettől függetlenül is: a két szem által adódó eltolódott két képet nyilvánvalóan nem a szemek dolgozzák föl térbeli mélységet is magába foglaló látvánnyá. Mindez viszont már *a posteriori* ismeret, és ezért témánk szempontjából közömbös. Számunkra itt elég annyi, hogy a tapasztalati világ térbeliként való megjelenése (függetlenül attól, hogy e térbeliség „tükröződés”-e, vagy

puszta jelenség a kanti értelemben), már eleve föltételez egy olyan képességet, amely ezt lehetővé teszi.

A továbbiakban azt az *a priori* adott képességet, melynek köszönhetően számunkra a világ térbeliként jelenik meg, a térbeliség személete képességének, vagy rövidebben – Fregét követve – „térszemlélet”-nek („*Raumanschauung*”) fogjuk nevezni (vö. Frege 1899. 9), amely szóösszetételben a „tér” szóval értelemszerűen nem a kanti tiszta térre mint a priori tiszta formára gondolunk, hanem az empirikusan megjelenő térre. A „térszemlélet” tehát a most bevezetett értelemben az az *a priori* adottság, melynek köszönhetően az érzékileg megjelenő külvilág térbelileg jelenik meg számunkra, és képesek vagyunk azt térbeliként szemlélni. Mivel Kantnál a tér mint tiszta szemlélet az, amely a külső érzéki világot térbeliként jeleníti meg, a kanti tér mint *tiszta szemlélet a „térszemlélet” általunk most bevezetett általánosabb fogalmának alelete.*

V. TÉRSZEMLÉLETÜNK ÉS A GEOMETRIA

Egyáltalán nem evidens, hanem kérdésként vetődik föl, hogy a kanti tér mint tiszta szemlélet, illetve az előbbiek értelmében vett, a kanti esetet magában foglaló, de annál általánosabb „térszemlélet” rendelkezik-e valamiképpen geometriával. Bár ez logikailag nem igazolható, ám erős érvek hozhatóak föl amellet, hogy igen.

Egyrészt tanúságot szolgál ehhez mind Platón Menónja (vö. Platón Menón XVI–XIX; illetve Menón 82b–85b. In Platón 1984. 675–687; Platón 2013. 53–62), mind a geometriai tételek nem analitikus, hanem a puszta szemlélet általi bizonyítása. Amikor síkbeli ábrák segítségével kétdimenziós geometriai tételeket bizonyítunk, éppen azt a képességünket használjuk, mely lehetővé teszi, hogy az érzékileg megjelenőt térbeli összefüggéseiben lássuk. Mi több – mint amiképpen erre már Platón is fölhívta a figyelmet –, ennek nyomán az is világossá válik, hogy itt az érzéki tapasztalat nem adja, hanem csak segíti a geometriai belátást, hiszen a legtökéletesebb érzékileg szemlélhető ábra sem pontos geometriailag – nem is beszélve arról, hogy egy csupán közelítőleg pontos ábrán is megláthatjuk a geometriai összefüggéseket. Evidens az is, hogy az a bizonyítás, amit szemlélés révén látunk be, nem a konkrét, az érzéki-vizuális térben megjelenő ábrára, hanem az adott osztályba tartozó lehetséges geometriai alakzatok (pl. a háromszögek) összességére vonatkozik. Platón ezt már meggyőzően tematizálta, de szükségtelen hozzá fordulnunk, hiszen Thalész és Püthagorasz tételének középkolai szemléletes bizonyítására visszaemlékezve ezt mindenki saját élménye alapján beláthatja. Igaz, ehhez már egyfajta „iskolázott” térszemlélet szükséges (vagy legalábbis iskolázott személynek a segítségével), ám ha nem volna meg eleve, még preteoretikusan a térbeli viszonyok észlelésének és szemlélé-

sének képessége – azaz az előbbiekben bevezetett „térsemlélet” – akkor nem volna lehetséges az „iskoláztatás”-ra.

Az előbbiek nyomán így szükségünk van még egy fogalmi megkülönböztetés bevezetésére. A geometria tudomány. A térsemlélet mint az érzéki világ térbeliként való észlelésének adottsága viszont elemi képesség, mely nem igényel iskolai képzést, s ebben az értelemben „természetes” vagy „preteoretikus”. E preteoretikus térsemléletről (amely Heidegger terminológiájával a „*Zuhandenheit*” kategóriájához tartozik, de amelynek preteoretikus volta e kategória nélkül is jól érthető) meggyőző elemzést olvashatunk Heidegger *Sein und Zeit*-jében (lásd Heidegger 1927/2019. 22–24.§).

Az a tény viszont, hogy ez a preteoretikus térélmény és térsemlélet nem geometriai jellegű, természetesen még nem vonja maga után az eukleidészi geometria a priori voltának cáfolatát. Csupán az elemzés további finomítását teszi szükségessé, aminek nyomán a következő kérdést kell föltennünk: a preteoretikus térsemlélet vajon semleges-e a különböző lehetséges geometriák tekintetében, vagy határozottan valamely geometria felé mutat?

Mindezzel kapcsolatosan hangsúlyoznunk kell még azt is, hogy amikor térsemléletünk – vagy a kanti megközelítés kontextusában megfogalmazva a tér mint külső semléletünk tiszta formája – eukleidészi vagy nem eukleidészi jellegét vizsgáljuk, *mindig a háromdimenziós, végtelen térre kell gondolnunk*. Ha felteszszük ugyanis azt, hogy az eukleidészi geometria semléletes, azaz hogy (kantianus megfogalmazásban) összhangban van semléletünk tiszta formájával, illetve (általánosabb megközelítésben) az előbbiekben bevezetett „térsemléletünk”-kel, akkor analitikus igazságként adódik, hogy a nem eukleidészi geometriák kétdimenziós vagy háromdimenziós, de véges eukleidészi modelljei éppen eukleidészi voltak miatt semléletesek.

VI. HELMHOLTZ ÉS FREGE

Helmholtz és Frege egyaránt azon jelentős gondolkodókhoz tartozik, akik az elsők között foglalkoztak az általunk „transzcendentális”-ként jellemzett megközelítés jegyében az eukleidészi geometria a priori voltának kérdésével. Jelentőségük azonban nemcsak történeti: markánsan és ma is aktuálisan képviselik az arra adható, egymással radikálisan ellentétes két választ. Ezért tárgykörünket ma is az ő álláspontjukat szembesítve érdemes vizsgálni.

Helmholtz szerint addig, amíg az elemzés csak a semlélet fogalmáig jut el, úgy tűnhet, hogy Kantnak igaza van a geometria aprioritása tekintetében, ám a tudományos haladás lehetővé tette, hogy magát a semléletet további elemekre bontsuk föl, és ennek nyomán a kanti nézet tudományosan meghaladottá vált:

a tér nagyon jól lehet a szemlélet formája a kanti értelemben, és mégsem szükségképpen foglalja magában az axiómákat. (Helmholtz 1878. 213. Itt Helmholtz értelem-szerűleg az eukleidészi geometria axiómáira gondol.)

A jelen kor legjelentősebb tudományos eredményének tartom, hogy a szemlélet fogalma a gondolkodás elemi folyamataira fölbontva tárgyalandó, ami még hiányzik Kantnál, s ez meghatározza a geometriai axiómákról mint transzcendentális kijelentésekről alkotott fölfogását (Helmholtz 1878/1921. 134).

Helmholtz tehát nem veti el a térre mint a szemlélet tiszta formájára vonatkozó kanti állítást, csupán arra hívja föl a figyelmet, hogy ez és a geometriai a priori voltának kérdése különbözik egymástól, és csak az utóbbi tekintetében válaszol tagadóan, amennyiben az ezzel kapcsolatos kanti tézist a kor tudománya által meghaladottnak tekinti. Helmholtzzal vitatkozva gyökeresen ellentétes álláspontot foglal el Frege:

Kant nagy érdemét látom abban, hogy megkülönböztette a szintetikus és az analitikus ítéleteket. Amikor a geometriai igazságokat szintetikusnak és a priorinak nevezete, valódi lényegüket tára föl. Ezt pedig még ma is érdemes elismerni, mert sokszor nem ismerik föl. (Frege, 1884. 89 §. 101; Frege 1999. 112.)

Axiómáknak azokat az igaz kijelentéseket nevezem, melyeket nem bizonyítunk, mivel ismeretük egy olyan, a logikaitól teljesen különböző ismeretforrásból fakad, melyet „térszemlélet”-nek [Raumanschauung] nevezhetünk (Frege 1899. 9).

A tér Kant szerint a jelenséghez tartozik. Lehetséges volna, hogy más értelmes lények számára egészen másként mutatkozik, mint nekünk. Valójában még azt sem tudhatjuk, hogy az egyik ember számára ugyanolyannak tűnik-e, mint a másik ember számára. Mégis magában foglal valami objektívet: mindenki ugyanazon geometriai axiómákat ismeri föl, még ha csak cselekedetei által is [...] Objektív benne az, ami törvényszerű, fogalmi, megítélhető. A tisztán szemléleti nem közölhető. (Frege 1884. 26. §. 35; Frege 1999. 52.)

Bár az utóbbi idézetben szereplő második mondatl kapcsolatosan fenntartásaink vannak (lásd később), ettől eltekintve a következőkben az ő álláspontja mellett fogunk érvelni, mégpedig akkor is, ha ezáltal közölni próbáljuk a „nem közölhető”-t. (Ami nem jelenti azt, hogy tagadnánk Frege ezzel kapcsolatos állítását: azt elfogadva, eljárásunk paradox voltát tudatosan vállalva tesszük ezt.)

Ugyanakkor, tekintettel arra, hogy nem történeti, hanem fogalmi megközelítésben foglalkozunk tárgyunkkal, nem térünk ki az egyik oldalról Frege, másik oldalról Otto Liebman és a marburgi neokantiánus iskola (különösen Cohen és Natorp) közötti párhuzamra (vö. pl. Liebman 1880; Gabriel–Schlot-

te 2019; Merrick 2006), sem az utóbbiak és Helmholtz vitájára (vö. pl. Merrick 2006), s arra sem, hogy Cassirer miért tévedett, amikor Einstein relativitáselméletének hatására e kérdésben ő maga is anti-kantiánussá vált. Mindez külön tanulmány tárgyát képezhetné: itt csak annyiban van jelentősége, hogy álláspontunk nem valamiféle légből kapott újdonság, hanem a Pascaltól és Kanttól induló, a marburgi iskolán és Fregén át máig ívelő filozófiai tradícióhoz csatlakozik.

VII. ÉRVEK A „NEM KÖZÖLHETŐ” MELLETT

Természetesen nem kommunikálható érzéseinkről, érzelmeinkről, élményeinkről – s általában mentális állapotainkról – lehet kommunikálni. Ez azonban nem jelenti magának a tárgynak átadását vagy közvetítését. Ha valakinek fáj a feje vagy jó kedve van, arról tájékoztathatja a másik személyt, s az – mivel ismeri maga is az ilyen állapotokat – érteni fogja, miről van szó. Ám az ilyen példák nem állíthatóak párhuzamba térszemléletünk eukleidészi – vagy nem eukleidészi – jellegére vonatkozó kijelentéssel: ezt az utóbbit a népesség nagyobb része már eleve meg sem értené; a megértéséhez megfelelő képzettséggel rendelkező személyek között pedig nincs egyetértés ennek a tekintetében.

Konkrét példával: ha egy matematikus – s különösképpen a nem eukleidészi geometriában jártas matematikus – azt állítja, hogy számára a hiperbolikus és szférikus geometriák ugyanúgy szemléletesek, mint az eukleidészi, ezt másik személy nyilván nem ellenőrizheti, hiszen nem veheti magához az illető szemléletét, és nem is „hatolhat be” annak személyiségébe, hogy ellenőrizze kijelentésének helyes voltát.

Mit lehet tenni? El kell fogadnunk, hogy embertársaink egy része esetében a térszemlélet nem szükségképpen eukleidészi, s általában is ez az egész kérdéskör neveltetés és képzés kérdése? Azaz ne létezne egyetemesen a pascali „szív” (azaz a pascali intuíció), mely érzi a geometriai alapelvek – a geometriai axiómák – igazságát? Mert az eukleidészi geometria akkor is a priori, ha axiómáit nem a kanti tiszta szemlélet adja számunkra, hanem Pascal „szíve” (vö. *Gondolatok*, 282. töredék; Pascal 1983. 139).

A jelen tanulmány szerzője szerint a pascali intuíció a geometria esetében egyetemes. S ez nem dogmatikus kijelentés: bár természetéből következőleg *logikailag érvényesen nem bizonyítható, erős érvek hozhatóak föl* amellet, hogy térszemléletünk egyetemesen eukleidészi.

Platón *Menón*jára már hivatkoztunk (Platón 2013). Jóllehet, művelt személyek irányítják a műveletlen szolgát, ők vezetik rá, hogy mit szemléljen az ábrán, s hogyan értelmezze azt, a kérdés nem az, hogy műveltség, fölkészültség nélkül képes-e valaki geometriai belátásokra, hanem az, hogy a preteoretikus térképzetek alapján rávezethető-e valaki a nem eukleidészi tételek bizonyítására. Aki

tagadja e geometria *a priori* voltát, annak igenlő választ kell adnia erre a kérdésre, s a platónihoz hasonló nem eukleidészi példát kell nyújtania.

A *Menón*-ban található példa a platóni párbeszéd mint módszer jegyében fogalmazódott meg, és a nem eukleidészi geometriák szemléletes voltára hivatkozó személyekkel szemben ilyen dialógus kezdeményezhető, akik ezen az úton talán meggyőzhetők, hogy a nem-eukleidészi geometriák szemléletességére vonatkozó kijelentéseikben azok eukleidészi modelljeinek szemléletessége tévesztette meg őket.

Végezhetőek továbbá kikérdezős vizsgálatok vagy tesztek, melyek a legkülönbözőbb kultúrákban élő, a matematikában és a geometriában képzetlen személyek preteoretikus térképzeteire irányulnak. Ám az ilyen típusú vizsgálatokkal óvatosan kell bánni, mert a ma divatos relativizmus jegyében tendenciózusak lehetnek, és „objektív” bizonyítékként szolgálhatnak arra, hogy térszemléletünk jellege relatív, nem szükségképpen eukleidészi. S persze ugyanezen érv megfordítva is használható a térszemlélet – vagy legalábbis a preteoretikus térképzetek – eukleidészi jellegét alátámasztó vizsgálati eredményekkel szemben. (Az előbbieket értelmében nem perdöntő, de érdekes, pro-kantiánus eredményt adó empirikus vizsgálatként lásd pl. Izard–Pica et al. 2011.)

VIII. AZ EGYENES FOGALMÁNAK JELENTŐSÉGE A KANTI ELMÉLET SZEMPONTJÁBÓL

A legjelentősebb és legerősebb évet azonban a platóni párbeszédet mint módszert követve fogalmazhatjuk meg, azzal, hogy a lehetséges ellenérveket – azaz a párbeszéd folytatását – azokra hagyjuk, akik ezen érvek érvényességét kétségbe vonják. Érvünk előadásának kiindulópontjaként újra Kanthoz fordulunk:

Hogy az egyenes vonal a legrövidebb két pont között, szintetikai tétel. Mert fogalmam az egyenességről nem foglal magában mennyiséget, csak minőséget. A legrövidebb fogalma tehát egészen hozzákerül, nem vonható ki semmiféle taglalással az egyenes vonal fogalmából. A szemlélet kell tehát itt segítségül venni, csak ez teszi lehetővé a szintézist. (V/1. B16–B17; Kant 1913. 36–37.)

E kanti állítás egyenesen sokkolóként és egyúttal a geometria *a priori* voltára vonatkozó kanti tétel nyilvánvalóan hamis voltának igazolásaként jelenhet meg a matematikusok többsége számára. S ha ez az utóbbi a jelen sorok szerzője számára sohasem merült föl, be kell vallania, hogy az előbbi – azaz a sokkoló hatást – ő is átélte.

Mert miről is van szó? Az európai kultúrában (mely a tudományok tekintetében immár egyetemesen uralja az emberiség gondolkodását) az egyenes fogalma a középiskolákban – de talán már az általános iskolákban – hagyományosan két

adott pont közötti legrövidebb távolságként kerül meghatározásra. Hogyan is lehetne másképp definiálni – szegezhető szembe Kanttal –, s e kérdés egyben az ő most idézett állításának cáfolatát is jelenti. Ám megfelelő reflexió és utánagondolás után belátható, hogy mégiscsak a német filozófusnak van igaza: egy vonal geometriailag egyenes volta minőség, s nem mennyiség, amelynek önmagában nincs köze a mérték kategóriájához (lásd ezzel kapcsolatban pl. Büchel 1987. 150–152). Amikor az egyenesség fogalmát a modern matematika mértékbeli-mennyiségi sajátosságához köti, azaz megfosztja azt minőségi jellegétől, valójában egy történetileg kialakult, kultúrafüggő beállítódásnak engedelmeskedik: a modern kultúra azon jellegének, amelyet Heidegger a kalkulatív gondolkodás térnyeréseként jellemez. (Heidegger 1955/1959; ugyanez magyar fordításban: uő 1981 és 1983; továbbá uő 1957.)

Annak alátámasztására, hogy milyen nagy jelentősége van az egyenes e kanti meghatározásának az eukleidészi geometria a priori volta szempontjából, két szerzőre hivatkozunk.

Ladislav Kvasz szerint Kant a geometriának egy olyan megközelítését követte, mely kívülről szemléli tárgyát és egyúttal reflektál a szemlélet során föllépő perspektivikus hatásokra. Ezt Kvasz a geometria „projekciós” fölfogásának nevezi, s szerinte az nemcsak Kant korát jellemezte, hanem a későbbi projektív geometriának is sajátja. Kvasz ugyanakkor arra hívja föl a figyelmet, hogy később uralomra jutott egy másik (a festészetben a reneszánsz idejére visszavezethető) megközelítés, mely megengedi, hogy az egyenest görbékkel reprezentáljuk. Mármint Kvasz szerint Kant elmélete helyes a geometria projekciós fölfogását illetően, de tarthatatlan a Gauss, Bolyai, Lobacsevszkij és követői által képviselt utóbbi – általa interpretálónak nevezett – megközelítés esetében (vö. Kvasz 159–162).

A másik szerző, Joongol Kim Kvasszal ellentétes álláspontot foglal el, és azt hangsúlyozza, hogy az eukleidészi geometria a kanti meghatározás szerint az *a priori*, „belső” tér geometriai objektumainak tudománya. (Kim 12), és ezért az egyenes vonalakat ezen *a priori* tér objektumaként kell elképzelnünk. Ennek során pedig azokat fogalmukból következőleg nem jeleníthetjük meg görbékkel (vö. Kim 29–30).

Vegyük észre, hogy ellentétes megközelítésük ellenére e két szerző az egyenes jellegének tekintetében egyetért egymással. Kvasznak abban ugyanis igaza van, hogy ha „elvonatkoztatunk” – azaz elfordulunk – a tiszta szemlélettől, az egyenes fogalma relativizálhatóvá válik, és ekkor az eukleidészi értelemben vett „görbét” is egyenesnek tekinthetjük. Ám ez az állítás éppenséggel nem Kant cáfolata, hanem igazolása, hiszen – mint amiképpen ezt tanulmányunk elején láthattuk – a német filozófus állítása a geometria a priori voltáról a tiszta szemléletre vonatkozik, s ő maga is tisztában volt azzal, hogy az axiómák kicserélése nem vezet szükségképpen logikai ellentmondáshoz. Kvasz e tekintetben nemcsak közvetve, hanem kifejezetten is elismeri Kant álláspontját:

Ha a matematika nyelvét, szintaxisát és különösen szemantikáját oly módon értelmezzük, mint Kant tette, akkor nem lehetséges más geometria, mint az eukleidészi (Kvasz, id mű 155).

Kvasz és Kim látszólagosan ellentétes nézete tehát valójában konvergál, s mindkettő azt támasztja alá, hogy szemléletünknek egyedülként az eukleidészi geometria felel meg. E rész befejezeként újra Freget idézzük:

Csak annyit mondhatok, hogy ameddig az „egyenes”, a „párhuzamos” és a „szeli” szavakat úgy értem, ahogy értem, el kell fogadnom a *párhuzamossági* axiómát. Ha valaki nem fogadja el, azt kell föltételezem, hogy ő e szavakat másként érti. (Frege 1983. 266.)

Frege ezen szavai világosan fölfedik a nem eukleidészi geometriák titkát: az ezen geometriák által megkonstruált „szép új világ”-ok lehetőségének föltétele a szavak jelentésének megváltoztatása: azokhoz *à la* Aldous Huxley egyfajta „új beszéd”-re van szükség.

IX. A VONAL EGYENES VOLTÁNAK ÉS A DERÉKSZÖGNEK ÉSZLELÉSE MINT A *PRIORI* ADOTTSÁG

S akkor a korábban említett platóni dialógus módszerének szellemében fogalmazzuk meg két alapvető, háromdimenziós térben élő, háromdimenziós lényekre érvényes érvünket!

(1) Képzeljünk el vonalakat egy ábrán, melyek egy kivétellel jobbra vagy balra görbülnek el különböző mértékben. Az egy kivétel oly mértékben egyenes, hogy szemlélése során a szemlélő terében egyenesként jelenik meg. Mármint szüksége van-e a szemlélőnek a *mérték fogalmára* és *geometriai képzettségre* annak észrevételéhez, hogy a vonalak között a számára egyenesként megjelenő vonal az összes többi között kakukktójás? Vajon nem fogja-e minden intellektuális tevékenység és fontolgtatás nélkül „látni”, hogy az egyenes vonal különbözik a többi, görbe vonaltól? És vajon nem fogja-e azonnal látni, hogy egyes vonalak jobban görbülnek el, mint mások? Mindez pedig elképzelhetetlen volna az egyenes belsőleg adott, a priori mintája vagy etalonja nélkül. Az már persze fejlődéslélektani kérdés, hogy hány éves kortól lesz képes a valós (tehát NEM egy fiktív, kétdimenziós felületen élő, kétdimenziós) gyermek az egyenesnek mint kakukktójásnak a fölismerésére, valamint annak megkülönböztetésére, hogy az egyik vonal jobban görbül, mint a másik vonal. Ám nehéz érveket hozni amellet, hogy ehhez geometriai képzésre, vagy a vonalak hosszának mérícskélésére volna szükség, amiképpen amellet is, hogy egyes kultúrákban a görbe és az egyenes vonal ne volna az egészségesen fejlődő személyek által egy bizonyos kor után meg-

különböztethető. De nem szükségképpen kell ábrák segítségével érvelnünk. Egy erdő fáira tekintve, mely fák törzsének egy része természeti okok miatt jobbra vagy balra görbül, azonnal észlelhető lesz e rendellenesség, amiképpen azonnal fölismerhető lesz a sudár – azaz közelítőleg egyenes törzsű – fák jelenléte is, ami szintén az egyenesség észlelésének képességét, azaz az „egyenesség”-nek mint egyfajta belső etalonnak létezését föltételezi.

Ha az előbbieket elfogadjuk, automatikusan adódik, hogy az egyenes fogalmát csak térszemléletünkől elvonatkoztatva relativizálhatjuk, azaz hogy a „görbült” terű, nem eukleidészi geometriák csupán ezen elvonatkoztatás esetén válnak lehetségessé: azok – a már idézett Kjovasik terminológiájával – csupán nominálishan, de nem a kanti értelemben geometriák.

(2) Hasonlóan belátható, hogy képesek vagyunk egy vízszintes talajon álló erdő hozzávetőlegesen egyenes törzsű fái esetében azonnal észlelni, ha a fák egy része törzsük egyenes volta ellenére a talajhoz képest megdőlt – azaz ahhoz képest nem függőlegesen áll. Ugyanígy képesek vagyunk arra, hogy észleljük a keletre, nyugatra, északra vagy délre való dőlés irányát is, s nehéz volna föltételezni, hogy vannak olyan kultúrák, amelyeknek tagjai erre képtelenek. Vajon elképzelhetőek-e olyan ép elméjű személyek, akiknek Pisában sétálva ne tűnne föl, hogy amíg a templomok tornyai „egyenesen” – azaz függőlegesen – állnak, a nevezetes „pisai torony” ferde? Mivel a pisai torony, vagy egy egyébként egyenes törzsű fa „ferdeségének” észlelése minden mérés és mértékfogalom nélkül észlelhető, a függőleges volt is minőségként adódik, szemben a mennyiségi szemlélettel, mely a „dőlés”-t a 90 fokos szögtől való szögeltérésként, a kisebb és nagyobb szög kategóriájával határozza meg.

Mármost az a tétel, hogy a háromszög szögeinek összege 180 szögfok, már teoretikus állítás. Ám ha elfogadjuk, hogy rendelkezünk a háromdimenziós egyenesség és a függőlegesség preteoretikus, szemléletbeli etalonjával, akkor mindaddig, amíg nem vonatkoztatunk el ezen etalonoktól – azaz az általunk Frege nyomán „térszemlélet”-nek nevezett képességünkől, vagy a pascali intuíciónál – szükségszerűen adódik az a nevezetes belátás, hogy a háromszög szögeinek összege szükségképpen két derékszöget ad ki. S jól ismert, hogy ez az eukleidészi geometriában hagyományosan tételként bizonyított állítás helyettesítheti a párhuzamossági axiómát. Így akár (1), akár (2) elfogadása esetén *bizonyított, hogy térszemléletünk* – s ennek a eseteként *külső szemléletünk kanti értelemben vett tiszta formája* – *kitünteti az eukleidészi geometriát; azaz az eukleidészi geometria a priori a kanti értelemben.*

Vegyük észre, hogy bizonyításunk nem logikai, nem analitikus, hanem föltételezi az (1) vagy a (2) állítás legalább egyikének elfogadását, melyek analitikusan tekintve a preteoretikus térszemléletből adódó axiómáknak tekinthetők. Ha viszont ezeket elfogadjuk, már analitikusan következik, hogy térszemléletünk

eukleidészi, és így aki tagadni szeretné ezt, mind az (1), mind a (2) állítást meg kell cáfolnia.

Azon geometerek álláspontjából tehát, akik szerint a nem eukleidészi geometriák (tehát a háromdimenziós, végtelen nem eukleidészi terek, s nem azok kétdimenziós vagy véges, háromdimenziós eukleidészi modelljei) ugyanúgy szemléletesek, mint az eukleidészi, az következik, hogy az ő szemléletük számára a „görbe”-ként megjelenő vonal ezen minősége, vagy egy erdőbeli fatörzs görbe voltának látványa csupán relatív, s e görbe idomok akár egyenes vonalúaknak is tekinthetők. Hasonlóképpen: egy ilyen állítás maga után vonja azt is, hogy Pisa templomtornyait akár dőltnek, a város nevezetes ferde tornyát pedig akár függőlegesnek tekinthetjük. Ezzel pedig a platóni párbeszéd szellemében megfogalmaztuk számukra érveinket, s nekik kell eldönteni, hogy vállalják-e ellentétes álláspontjuk ezen következményeit.

X. NEM MÉRNÖKI VAGY FIZIKAI MÉRÉSEKRŐL, HANEM A VIZUÁLIS ÉS A TAPINTÁSI TÉRRŐL VAN SZÓ

A jobb szemmértékkel rendelkező személy számára ferde lehet az, ami a másik, gyengébb szemmértékű személy számára függőlegesként jelenik meg. S egy egyenesként megjelenő vonalról nagyítóval való vizsgálat során megállapíthatjuk, hogy mégsem az. Ennek azonban az észlelőképesség és az etalonok szempontjából nincs jelentősége. Elég volna az is, ha a „majdnem egyenes” és a „majdnem függőleges”, illetve a „határozottan nem egyenes” és a „határozottan nem függőleges” megkülönböztetésének képességéről beszélnénk. Ez ugyanúgy föltételezi a belső, a priori etalont, mint a pontosan ilyenekként való megjelenés megállapításának képessége: nem elméletről, nem mérésektől és analízisről, hanem preteoretikus térélményeinkről van szó.

S mindez igaz a vakok térképzetére is, illetve arra, amit Palágyi Menyhért tapintás általi vagy vak látásként határoz meg (Palágyi 1918/1925; illetve uő 1925) – bár az ő esetükben természetesen az erdő, a tornyok és a papírlapon található rajzolatok helyett más tárgyakat (makettek, domborított ábrákat) kell figyelembe venni. (Érdekfeszítő kérdésként merül föl, hogy a vakok az immár elméleti geometriában az elvontság mely fokáig juthatnak – illetve jutottak ténylegesen – el?)

Persze sem a geometria, sem a geometria filozófiája nem az egyenes fákról, nem a függőleges vagy ferde tornyokról szól. Ám itt az egyenes és a ferde volt mint minőségek preteoretikus megítélésének képessége képezi tárgyunkat, mely „belső” – *a priori* – minták vagy etalonok nélkül nem volna lehetséges. E belső minták pedig Kantnál a tér mint külső személetünk *a priori* tiszta formája, illetve – általánosabb megközelítésben – az általunk „térsemlélet”-ként meghatározott *a priori* képesség által, mintegy annak mozzanataként adottak.

Az eukleidészi geometria axiómái pedig ezeken a már preteoretikusan adott *a priori* mintákon alapulnak.

XI. NÉHÁNY KIEGÉSZÍTŐ MEGJEGYZÉS

(1) Térszemléletünk kapcsán a népszerűsítő irodalomban olykor hivatkoznak arra, hogy azért találjuk az eukleidészi geometriát természetesnek, mert a fizikai világ tere közelítőleg eukleidészi. Ez önmagában tulajdonképpen a geometriára vonatkozó kanti elméletnek „külső” – azaz nem kantianus –, evolucionista alátámasztása. Ezzel együtt az evolucionista érvelés e típusával szemben Poincaré nevezetes ellenérvére hivatkozhatunk, mely szerint sohasem a geometriát vagy a fizikát tesszük önmagában, hanem a kettő kapcsolatára vonatkozó hipotéziseinket. Így ha egy háromszögelési kísérletben a háromszög összegeit kisebbnek vagy nagyobbak mérjük, mint két derékszög összegét, ezt értelmezhetjük úgy is, hogy nem a tér, hanem a fény terjedési vonala a „görbe” – azaz nem a tér, hanem a fénysugár hajlik el az eukleidészi egyenestől (vö. Poincaré 1908).

(2) Poincaré kapcsán megjegyezzük még, hogy az analitikus geometriában az eukleidészi geometria görbülete nulla, azaz hiányzik. Kézenfekvő lehet ezt a matematikai tényt az egyenes mint minőség kitüntetettségének számszerű matematikai leképezéseként tekinteni. Az ugyanakkor, hogy ez matematikai érvenként fölhasználható-e az eukleidészi geometria *a priori* voltára vonatkozó kanti tézis mellett, további vizsgálódást igényel. (A „nulla” számértéket, azaz a görbületi origót egy szférikus vagy hiperbolikus geometriához is rendelhetjük, és ekkor az eukleidészi geometriának is nullától eltérő görbülete lesz. Kérdéses, hogy egy ilyen origóválasztás a szemlélet figyelmen kívül hagyása esetén következmények nélkül, teljesen szabadon megtehető-e?)

(3) Fölvetődik a kérdés, hogy ha léteznek földön kívüli háromdimenziós lények, érvényes-e rájuk Kantnak az eukleidészi geometria a priori voltára vonatkozó tézise? Persze Kant állítása nemleges válasz esetén is érvényben maradna az emberiség tekintetében. Az általánosabb érvényesség mellett szól ugyanakkor, hogy az egyenes és a függőleges mint minőségek észlelése a hasonló és a nem hasonló közötti megkülönböztetés képességén nyugszik (a görbe vonalak mind hasonlóknak abban, hogy nem rendelkeznek az „egyenes” minőségével stb.), és elképzelhetetlen olyan három dimenziós értelmes megismerő lény, aki ne bírna e képességgel. Emiatt is erősen kétséges az előbbieken említett „külső”, evolucionista megtámogatása Kantnak, hiszen a különbség és a hasonlóság fölismerésének képessége nem köthető össze egyetlen konkrét fizikai vagy természettudományos-empirikus elmélettel sem: ahhoz hogy egyáltalában megfigyeléseket tehessünk, és azokat rendszerezni tudjuk, már eleve szükségünk van

erre a képességre. Ha evolúcióelméletileg szeretnénk megtámogatni Kantot, akkor sokkal inkább erre a különbségtevő képességre mint az életben maradás föltételére célszerű hivatkozni, melynek nyomán az előbbiek szerint már adódik az eukleidészi geometria kanti értelemben vett *a priori* volta. (A fantazmagóriák gömbösférán élő fiktív, kétdimenziós lényeknek az egyenes és a görbe *a priori* szemléleti megkülönböztetése ellenére lehet nem-eukleidészi tapasztalati geometriájuk – kérdés, hogy ha e fantázialények valóban értelmesek, nem jutnának-e el így is az eukleidészi geometria kitüntetéséhez? De tanulmányunkban nem foglalkozunk fantazmagóriákkal.)

(4) Az előbbi fejtegetés fölveti azt a mai filozófián belül „tiltott” klasszikus metafizikai-teológiai kérdést, hogy vajon egy mindenható lény teremthetett volna-e – vagy teremtett-e – olyan három dimenzióban élő, háromdimenziós értelmes lényeket, akik térszemlélete nem eukleidészi. E kérdés a mindenhatóság fogalmából következő paradox kérdések egyike, és rokon azzal a karteziánus kérdéssel, hogy Isten teremthetett volna-e olyan világot, melyben nem a jelen matematika tételei az érvényesek. Mint ilyen, e kérdés nyilván túl van a tiszta ész kanti értelemben vett határain, és a mai korszellem kontextusában obskúrusnak és spekulatívnak minősül. Ezzel együtt ez tanulmányunk tárgyának legmélyebb rétegét érinti: arra mutat rá, hogy az eukleidészi geometria *a priori* voltának problémaköre ugyanazon a szinten található, ahol a logikai törvényeknek és a logikai szükségszerűségnek a kérdése.

Ami a teológiai dimenziót illeti, Tóth Imre kiváló történeti vizsgálódásaiban kitér arra, hogy az eukleidészi geometria kérdése – különösen a 17–18. századi protestáns teológiában – valóban összekapcsolódott az isteni mindenhatóság kérdésével (vö. Tóth 2000a), s az ő nyomában Tanács János is foglalkozik ezzel (Tanács 2015). Csakhogy az akkori teológusok és Tóth Imre őket követő megközelítésétől elröven Kantot helyesen interpretálva ebben az összefüggésben nem az a kérdés, hogy Isten teremthetett volna-e nem eukleidészi világot vagy világokat, hanem az, hogy teremthetett-e volna – teremtett-e – olyan háromdimenziós értelmes lényeket, akiknek *a priori* térszemlélete nem eukleidészi.

XII. GEOMETRIA ÉS SZABADSÁG: REFLEXIÓ TÓTH IMRÉRE

Tóth Imre értelmezésében a nem eukleidészi geometriák fölfedezése az emberi szabadságért folytatott harc része volt (vö. Tóth 2000b). S annak ellenére, hogy a nem-eukleidészi geometriák kérdését Kanttól eltérően mint a világrendet illető ontológiai kérdést tárgyalja, az alapkérdés tekintetében igaza van: a nem eukleidészi geometriák fölfedezése megkövetelte a szemlélet megkött ereje alól való felszabadulást, és ez nem lehetett könnyű.

Ha továbbgondoljuk Tóth Imre ezen értelmezését, nyilvánvalóvá válik, hogy ezen új geometriák felfedezői jóval többet nyújtottak számunkra, mint a nem eukleidészi „új világ”-okat: e geometriák mint észbeli konstrukciók megjelenésével kezdődött a szemlélettől elszakadó modern matematika kialakulása, mely mindenképpen a matematikai gondolkodás – s ezáltal az emberi szellem – egyfajta fölszabadulását jelentette. Csakhogy paradox módon ez a matematika is egy bizonyos értelemben kantianus alapokon nyugszik: a szimbólumok, az azokból alkotott összetett szimbólumsorok, valamint a levezetési szabályokkal való manipuláció föltételezi a térbeli alakzatok közötti különbség fölismerésének képességét. E képesség pedig szükségképpen csupán *a priori* lehet, hiszen nélküle eleve nem észlelhetnénk az alakzatokat. (Ami persze nem zárja ki azt, hogy az evolúció során kialakult *a priori* adottságról legyen e tekintetben szó).

Így a szemlélettől való elszakadás által jellemzett modern matematika – melynek Hilbert-féle programja az előbbiek értelmében véve tudatosan kantianus alapon fogalmazódott meg – a maga szimbólumaival, konstrukcióival ma is előfeltételezi a térbeli alakzatok szemlélését lehetővé tévő *a priori* adottságot, és ennyiben annak ellenére, hogy axiómaiban radikálisan elszakadt a szemlélettől, továbbá nem föltételezi a tér kanti értelemben vett *a priori* voltát sem, ma is „kantianus”.

IRODALOM

- Beck, Lewis White 1956. Can Kant's Synthetic Judgments be made Analytic? *Kant Studien*. 47/1–4. 168–181. <https://doi.org/10.1515/kant.1956.47.1-4.168>
- Büchel, Georg 1987. *Geometrie und Philosophie. Zum Verhältnis beider Vernunftwissenschaften im Fortgang von der Kritik der reinen Vernunft zum Opus postumum. (Kantstudien–Erganzungshefte)*. Berlin, Walter de Gruyter. <https://doi.org/10.1515/9783110857511>
- Frege, Gottlob 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik. Ein logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau, Verlag von Wilhelm Koebner.
- Frege, Gottlob 1899. An Hilbert. In Frege 1980. 6–10.
- Frege, Gottlob 1980: *Gottlob Freges Briefwechsel* mit D. Hilbert, E. Husserls, B. Russell, sowie ausgewählte *Einzelbriefe* Freges. Szerk.: G. Gabriel – F. Kambartel – Chr. Thiel. Hamburg, Felix Meiner Verlag. <https://doi.org/10.28937/978-3-7873-2295-4>
- Frege, Gottlob 1983. Logik in der Mathematik. In *Nachgelassene Schriften*. 2. jav. kiad. Hamburg, Felix Meiner Verlag. 213–270. <https://doi.org/10.28937/978-3-7873-3159-8>
- Frege, Gottlob 1999. *Az aritmetika alapjai*. Budapest, Áron Kiadó.
- Gabriel, Gottfried – Sven Schlotte 2019. Freges Philosophie der Mathematik im Kontext des Neukantianismus. In Kröner et al. 3–16.
- Heidegger, Martin 1927/2019. *Lét és idő*. 3. jav. kiad. Budapest, Osiris.
- Heidegger, Martin 1955/1959. *Gelassenheit*. Pfullingen, Günther Neske.
- Heidegger, Martin 1981. Ráhagyatkozás. Fordította: Szent-Iványi István. *Filozófiai Figyelő*. 3/1–2. 81–92. Heidegger 1955/1959 magyar fordítása.
- Heidegger, Martin 1983. Érzetlenség. fordította Redl Károly. *Magyar Filozófiai Szemle*. 27/2. 274–281. Heidegger 1955/1959. magyar fordítása.

- Heidegger, Martin 1957. *Der Satz vom Grund*. Vorlesung (gehalten im Wintersemester 1955/56 an der Universität Freiburg i. Br.); Vortrag (gehalten am 25. Mai 1956 im Club zu Bremen u. am 24. Oktober 1956 an der Universität Wien). Pfullingen, Günther Neske.
- Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von 1878. The Origin and Meaning of Geometrical Axioms – II. *Mind*. 3. évf. 10. sz. 212–225. <https://doi.org/10.1093/mind/os-3.10.212>
- Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von 1878/1921. Die Tatsachen in der Wahrnehmung. (Rede, Berlin 1878). In Paul Hertz – Moritz Schlick (szerk.); Hermann v. Helmholtz *Schriften zur Erkenntnistheorie*. Berlin, Julius Springer. 109–152.
- Izard, Véronique, Pierre Pica, Elisabeth S. Spelke, Stanislas Dehaene 2011. Flexible intuitions of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 108/24. 9782–9787. <https://doi.org/10.1073/pnas.1016686108>
- Kant, Immanuel 1913. *A tiszta és kritikája*. Ford. Alexander Bernát, Bánóczy József. Budapest, Franklin Társulat.
- Kim, Joongol 2006. Concepts and Intuitions in Kant's Philosophy of Geometry. *Kant-Studien*. 97/2. 138–162. <https://doi.org/10.1515/KANT.2006.009>
- Kjosavik, Frode 2009. Kant on Geometrical Intuition and the Foundation of Mathematics. *Kant-Studien* 100/1. 1–27. <https://doi.org/10.1515/KANT.2009.001>
- Koenig, Daniel – Gregor Nickel – Shafi Shokrani – Ralf Krömer (szerk.) 2019. *Mathematik in der Tradition des Neukantianismus*. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik. 11. kötet. Siegen, Universitätsverlag. <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:467-14910>
- Kvasz, Ladislav 2011. Kant's Philosophy of Geometry – On the Road of a Final Assessment. *Philosophia Mathematica*. 19/2. 139–166. <https://doi.org/10.1093/phimat/nkr007>
- Liebman, Otto 1875/1880. *Zur Analysis der Wirklichkeit: eine Erörterung der Grundprobleme der Philosophie*. 2. jel. bőv. kiad. Straßburg, Verlag von Karl Tübnér.
- Merrick, Teri 2006. What Frege Meant When He Said: Kant is Right About Geometry? *Philosophia Mathematica*. 14/1. 44–75. <https://doi.org/10.1093/phimat/nkj013>
- Palágyi, Melchior 1908/1925. Die Theorie der Phantasie. In Ludwig Klages (szerk.) *Ausgewählte Werke von Prof. Dr. Melchior Palágyi*. Leipzig, Verlag von Johann Ambrosius Barth. 69–105.
- Palágyi, Melchior 1925. Raum und Zeit. In Ludwig Klages (szerk.) *Ausgewählte Werke von Prof. Dr. Melchior Palágyi*. Leipzig, Ambrosius Verlag. 106–123.
- Pascal, Blaise 1983. *Gondolatok*. Szerk. Radnóti Sándor; ford. Pődör László. Budapest, Gondolat Kiadó. 2. kiad.
- Perez, Daniel Oman 2015. The Possibility of an Antropological Study of Human Nature in Kant. In Patricia Kauark-Leite – Giorgia Cecchinato – Virginia de Araujo Figueiredo – Margit Ruffing – Alice Serra (szerk.) *Kant and the Metaphors of Reason*. Hildesheim – Zürich – New York, Georg Olms Verlag. 445–454.
- Platón 1984. Menón. Ford. Kerényi Grácia. In *Platón összes művei*. Budapest, Európa Könyvkiadó. I. kötet. 643–724.
- Platón 2013. *Menón*. Ford. Bárány István. Budapest, Atlantisz Könyvkiadó.
- Poincaré, Henri 1908. *Tudomány és föltevés*. Ford. Szilárd Béla. Budapest. Kir. Magyar Természettudományi Társulat.
- Rovira, Rogelio 2020. Is the division of judgments into analytic and synthetic relative? The discussion between Maaß and Kant (through Schultz). *Kant-Studien*. 111/3. 445–469. <https://doi.org/10.1515/kant-2020-0037>
- Székely László 2016. *A kanti a priori és a nem eukleidészi geometriák*. In Tánczos Péter – Varga Rita. (szerk.) „...amennyiben szellemi lények vagyunk” *Tanulmányok Immanuel Kant aktualitásáról*. Budapest, L'Harmattan Kiadó. 51–76.

- Tanács János 2015. The Problem of Parallels as a Protestant Issue in Late Eighteenth-Century Hungary. In Tamás Demeter – Kathryn Murphy – Claus, Zittel (szerk.) *Conflicting Values of Inquiry: Ideologies of Epistemology in Early Modern Europe*. Boston/MA, Brill Academic Publishers. 200–220. https://doi.org/10.1163/9789004282551_010
- Tóth Imre 2000a. Isten és geometria. In *Új Isten és Geometria*. Budapest, Osiris Kiadó. 137–272.
- Tóth Imre 2000b: Matematikai gondolkodás, igazság, tagadás és alkotás. In *Új Isten és Geometria*. Budapest, Osiris Kiadó. 273–412.